Math. P.
429cd

R

Math. P.
429 c.

R

Leichtfaßlicher Unterricht in der Lehre von den Quadrat- und Cubikzahlen für Selbstlehrlinge.

Herausgegeben von

D. Johann Paul Pöhlmann.

Ein Anhang zu seinem Rechenbuche.

Erlangen,
bei J. J. Palm und Ernst Enke 1819.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Eine gründliche Kenntniß von den Quadrat- und Cubikzahlen, so wie insbesondere von der Art und Weise ihre Wurzeln zu finden, darf man mit Recht von jedem Schullehrer, der sich nicht gerade unter die Schlechtesten seines Standes will zählen lassen, fordern. Da indessen nicht gerade alle Jünglinge, die sich dem Schulstande widmen, Gelegenheit haben, mündlichen und gründlichen Unterricht in dem genannten Theile der Rechenkunst zu erhalten; so habe ich geglaubt, daß ein Werkchen wie das vorliegende ist, um so weniger überflüssig seyn dürfte, je mehr ich mich bemüht habe, die erwähnte Lehre darinnen so populär und deutlich vorzutragen, daß jeder, der die nöthigen

Vorkenntnisse*) und nur einige natürliche Geschicklichkeit hat, sich vermittelst desselben gar leicht die oben erwähnte Kenntniß verschaffen kann. Wenigstens hat sich ein Schulkandidat, der noch nichts von den hier abgehandelten arithmetischen Lehren wußte, bloß durch das Abschreiben des Manuscripts so vertraut mit denselben gemacht, daß ich ihm alle von mir angebrachten Rechnungsbeyspielen zur wiederhohlten Prüfung übergeben konnte.

Daß ich mich übrigens aller, durch die Buchstabenrechnung zu führenden, Beweise für die Allgemeingiltigkeit der aufgestellten Sätze enthalten, dagegen aber manche Wiederhohlungen mir erlaubt habe, wird kein billig denkender Kunstrichter tadeln, wenn er bedenkt, welches Lesepublikum ich im Auge hatte.

Ostheim bey Gunzenhausen,
im März 1819.

Der Verfasser.

---

*) Unter diese Vorkenntnisse rechne ich auch die Bekanntschaft mit der Lehre von den Decimalbrüchen. Wer diese Bekanntschaft noch nicht hat, kann sich dieselbe leicht verschaffen, durch Hilfe des von mir im Palmischen Verlage 1819 herausgegebenen Werkchens: Leichtfaßlicher Unterricht in der Lehre von den Decimalbrüchen.

Erster Abschnitt.

Vorbereitende Wahrheiten.

§. 1.

Bekanntlich heißt diejenige Zahl, welche entsteht (gefunden wird), wenn man 2 Zahlen mit einander multiplicirt, das **Product**, die 2 mit einander multiplicirten Zahlen aber die beyden **Factoren** dieses Products. So ist z. B. 21 ein Product aus den beyden Factoren 3 und 7; 36 ein Product aus den Factoren 4 und 9, oder 3 und 12, oder 2 und 18.

§. 2.

Man kann jede Zahl mit sich selbst multipliciren oder 2 Factoren wählen, die einander gleich sind. Man kann z. B. 2 mit 2, 3 mit 3, 4 mit 4 u. s. w. multipliciren, also ein Product suchen aus 2 einander ganz gleichen Factoren.

Man kann aber auch mehr einander gleiche Factoren mit einander multipliciren, d. h. das Product, welches durch die Multiplication zweyer einander gleichen Factoren entstanden ist, wieder mit dem einen dieser Factoren, und das nun entstandene abermahls mit demselben Factor u. s. w. multipliciren. Wir können also 2 mit 2 multipliciren und erhalten dadurch das Product 4. Dieses Product können wir abermahls mit 2 multipliciren, wodurch wir das Product 8 erhalten. Auch dieses Product kann wieder mit 2 multiplicirt werden, was 16 zum Producte gibt. Und so kann es ins Unendliche fortgehen, und jede Zahl kann so mit sich selbst multiplicirt werden, so oft man will. Folgender Ausdruck: 3 + 3 + 3 + 3 heißt, die Zahl 3 soll 4 Mahl als Factor genommen werden, indem man also multiplicirt:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 9 \\ 3 \\ \hline 27 \\ 3 \\ \hline 81 \end{array}$$

und 81 wäre also hier ein Product aus 4, einander gleichen Factoren, welche Factoren sind 3, 3, 3, 3, oder: 81 wäre hier ein Product aus der Zahl 3, welche 3 Mahl mit sich selbst multiplicirt worden wäre. a) 3 Mahl 3 = 9, b) 3 Mahl 9 = 27, c) 3 Mahl 27 = 81.

Hieraus erhellet auch deutlich, was es eigentlich heiße: eine Zahl 2 Mahl, 3 Mahl, 4 u. s. w. Mahl mit sich selbst multipliciren. Bey der 2ten Multiplication sind eigentlich die Factoren einander nicht mehr gleich, sondern im vorliegenden Beyspiele sind ja 9 und 3 die Factoren, und bey der dritten Multiplication sind 27 und 3 die Factoren. Wenn es also heißt: eine Zahl soll zum zweyten Mahle mit sich selbst multiplicirt werden, so soll eigentlich das Product, welches eine mit sich selbst multiplicirte Zahl gegeben hat, abermahls mit dieser Zahl (ich möchte sie die Grundzahl oder Stammzahl nennen) multiplicirt werden. Und der Ausdruk: 3 + 3 + 3 ist so viel als: 9 + 3, so wie 3 + 3 + 3 + 3 so viel heißt als: 27 + 3.

§. 3.

Jedes Product, das aus lauter einander gleichen Factoren besteht, nennt man eine Potenz oder Dignität von einem solchen Factor. Ein solcher Factor wird hinwiederum in Beziehung auf die Potenz Wurzel genannt. So ist z. B. 81 die Potenz von den 4 Factoren 3 + 3 + 3 + 3 und 3 hinwiederum ist die Wurzel von der Potenz 81.

§. 4.

Eine Zahl kann der Potenzen oder Dignitäten unendlich viele geben; so sind z. B. 16,

64, 256, 1024 lauter Dignitäten von 4. Man sieht leicht ein, daß es nöthig ist, Ausdrükke zu haben, wodurch man die verschiedenen Dignitäten einer Zahl von einander unterscheiden kann, und wodurch man in den Stand gesetzt wird, deutlich und bestimmt von ihnen zu reden. Man hat solche Ausdrükke oder Namen für die verschiedenen Dignitäten, denn man benennet sie nach der Zahl der Factoren, aus denen sie entstanden sind.

Ist nämlich ein Product aus 2 gleichen Factoren entstanden, so heißt es die zweyte Dignität, ist es aus drey gleichen Factoren entstanden, so heißt es die dritte Dignität u. s. w. Die Wurzel selbst wird aber die erste Dignität genannt. So ist z. B. 27 die dritte Dignität von 3, 16 die zweyte Dignität von 4.

Anmerkung.

Wenn man der Wurzel die Benennung erste Dignität beylegt, so ist diese Benennung nicht passend. Denn Dignität zeigt ja alle Mahl ein Product aus lauter gleichen Factoren an, und die Wurzel einer Dignität ist ja kein solches Product. Man hat vermuthlich der Wurzel gedachte Benennung beygelegt, weil man glaubte, wo eine zweyte Dignität ist, müsse doch auch eine erste seyn. Schikklicher wäre es wohl, die jetzt so genannte zweyte Dignität mit der Benennung erste Dignität zu belegen. Aber dann stimmte freylich wieder die Zahl der Dignität nicht mit der Zahl der Factoren überein,

welcher Umstand wahrscheinlich der Grund ist, daß man eine zweyte Dignität angenommen hat, wo eigentlich keine erste ist.

§. 5.

Die Zahl, wodurch man anzeigt, von welcher Dignität die Rede ist, heißt der Exponent der Dignität, und sie wird beym schriftlichen Vortrage alle Mahl oben rechter Hand an die Wurzel geschrieben. Demnach bedeütet der Ausdrukk: 5^3 (welcher gelesen wird: 5 potentiae 3, oder 5 in der 3ten Potenz), so viel als 5 + 5 + 5 oder die Zahl 125, und 3 ist hier der Exponent der Dignität. Will man aber anzeigen, daß die Wurzel aus irgend einer Dignität, von der 3ten Dignität an aufwårts, gedacht werden soll, so macht man folgendes Zeichen: $\sqrt{}$ (, welches nichts anders als ein verzogenes lateinisches r, der Anfangsbuchstabe von radix, Wurzel, ist) und setzt oben in die Oeffnung den Exponenten. Dieser Ausdrukk: $\sqrt[3]{27}$ heißt also so viel als: die Wurzel aus 27, welche Zahl die 3te Dignität ist. Wollte man anzeigen, daß die Zahl 625 als die 4te Dignität angenommen und ihre Wurzel gedacht werden soll; so můßte man schreiben, $\sqrt[4]{625}$.

Was werden demnach die Ausdrůkke: $\sqrt[5]{3125}$, $\sqrt[3]{343}$, sagen wollen? Sie wollen sa-

gen, daß im ersten Fall die Zahl 3125 die fünfte, im 2ten aber, daß 343 die dritte Potenz ist, und daß wir uns in beyden Fällen die Wurzel der angegebenen Zahl denken oder sie suchen sollen.

Soll angezeigt werden, daß man sich die Wurzel einer Zahl in der 2ten Potenz denken soll, so wird das bloße Wurzelzeichen (ohne den Exponenten) vor die Zahl gesetzt. So heißt z. B. $\sqrt{81}$ so viel als: 81 ist hier die 2te Potenz und davon soll die Wurzel gedacht oder gesucht werden, und der Ausdrukk ist so viel als 9. Eben so heißen die Ausdrükke: $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{144}$ so viel als: die Zahlen 49, 64, 144 stehen in der 2ten Potenz und ihre Wurzeln, nämlich 7, 8, 12 sollen gedacht oder genommen werden.

Man pflegt auch die Menge der gleichen Factoren den Grad oder die Dimension der Potenz zu nennen. So ist z. B. die Zahl 81 eine Potenz des vierten Grades von der Zahl 3. Denn $3 + 3 + 3 + 3 = 81$. Diejenige Zahl aber, welche den Grad einer Potenz anzeigt, heißt wie vorhin der Exponent. Man kann also sagen, entweder: der Exponent ist diejenige Zahl, welche anzeigt (sagt) von welcher (der wie vielsten) Potenz die Rede ist, oder: der Exponent ist die Zahl, welche den Grad (die Dimension) der Potenz anzeigt. Der Wurzel aus solcher Potenz kommt alsdann auch derselbige Grad, also auch derselbige Exponent zu.

§. 6.

Sowohl die 2te, als die 3te Potenz hat noch einen besondern Namen. Die 2te heißt nämlich *Quadratzahl* und ihre Wurzel die *Quadratwurzel*, die dritte (Potenz) aber heißt die *Cubikzahl* und ihre Wurzel die *Cubikwurzel*.

Welches ist demnach die Quadratzahl von 8? von 12? von 25? von 30?

Welches ist die Quadratwurzel von 36? von 49? von 64?

Anmerkung.

Die Benennung Quadratzahl kommt von dem Umstande her, daß die Zahl, womit der Flächen-Inhalt eines Quadrates angegeben wird, alle Mahl eine Zahl ist, die entsteht, wenn man eine andere mit sich selbst multiplicirt. Sollte z. B. ein Quadrat, dessen Seite 8 Schuh wäre, seinem Inhalte nach angegeben werden, so müßte man 8 + 8 = 64 Quadrat-Schuh nennen. In einer solchen Figur, die bekanntlich eben so hoch als breit ist, könnten nämlich 8 Quadratschuh neben und 8 Quadratschuh über einander liegen, wie Fig. 1. anschaulich macht.

Der Name Cubik (Würfelzahl) kommt von dem Worte Cubus (Würfel) her. Da nämlich ein Würfel von gleicher Dikke, Höhe und Breite ist, so kann man seinen körperlichen Inhalt finden, wenn man die dritte Dignität von der Zahl seiner Seite sucht. Wäre z. B. die Seite

eines Würfels 8 Schuh lang, so müßte man 8 + 8 + 8 nehmen, um seinen körperlichen Inhalt in Cubikschuhen zu finden. Demnach stellt jede Zahl in der 3ten Potenz den körperlichen Inhalt irgend eines Würfels, es sey nun in Cubikzollen, oder in Cubikschuhen u. s. w. dar. Ganz deütlich wird übrigens diese Sache nur dem seyn, der die hieher gehörigen Sätze aus der Geometrie inne hat.

§. 7.

Eine Zahl zu der verlangten Potenz erheben, heißt nichts anders als: eine Zahl so oft als Factor nehmen, als der Exponent Einheiten in sich hält*). Erhebe die Zahl 6 zur 4ten Potenz, heißt demnach: suche das Product aus 6 + 6 + 6 + 6, oder multiplicire 6 drey**) Mahl mit

*) Manche Lehrbücher sagen: Eine Zahl zur verlangten Potenz erheben heißt: die Zahl so viel Mahl mit sich selbst multipliciren, als der vorgeschriebene Exponent anzeigt. Allein dieß ist doch wahrhaftig nicht richtig und genau gesprochen. 4^2 hat 2 zum Exponenten und doch multipliciren wir 4 nur Ein Mahl und nicht 2 Mahl mit sich selbst, wenn wir sprechen: 4 Mahl 4 macht 16. Und bey 5^3 ist der Exponent 3 und gleichwohl zeigt dieser Ausdrukk nur eine zweymahlige Multiplication an, nämlich a) 5 Mahl 5, und b) 25 Mahl 5.

**) Gewöhnlich sagt man: vier Mahl.

sich selbst. Eine Zahl aufs Quadrat erheben oder quadriren heißt demnach eine Zahl mit sich selbst (als 12 + 12, 16 + 16) multipliciren.

Aus einer Zahl a die verlangte Wurzel ausziehen, heißt eine solche Zahl finden, die, wenn man sie zur Potenz des gegebenen Exponenten erhebt, die Zahl a gibt, oder auch: die Zahl finden, die, so oft als Factor genommen, als der Exponent anzeigt, die Zahl a zum Producte gibt. Wenn also die Zahl 216 gegeben wäre mit dem Auftrage, daraus die Wurzel des dritten Grades zu suchen, so sollte eine Zahl gesucht werden, welche, wenn man sie 3 Mahl als Factor nimmt, die Zahl 216 zum Producte gibt, und das wäre die Zahl 6. Denn 6 + 6 + 6 = 216.

§. 8.

Die Quadratzahlen, Cubikzahlen und Dignitäten überhaupt werden vollkommen genannt, wenn sich ihre Wurzeln genau angeben lassen, unvollkommen aber, wenn ihre Wurzeln nicht nach der größten Schärfe bestimmt werden können. So ist z. B. die Quadratwurzel aus 144 = 12, aus 625 = 25, aus 81 = 9 folglich sind 144, 625, 81 vollkommene Quadratzahlen. Und die Wurzel aus 20,25 *) ist 4,5 ($= 4\frac{5}{10}$),

*) Man übersehe nicht, daß hier 2 Decimalstellen, nämlich $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ vorhanden sind.

also eine Wurzel, die genau dargestellt werden kann, daher ist auch 20,25 (= 20¼) eine vollkommene Quadratzahl. Daß uns aber die Zahl 4,5 = 4½, wenn man sie mit sich selbst multiplicirt, 20¼ zum Product geben müsse, ist leicht einzusehen. Denn 4½ ⨯ 4½ heißt ja 4½ soll 4½ Mahl genommen werden. Wenn wir aber zusammen zählen 4½ + 4½ + 4½ + 4½ + 2¼ *), so erhalten wir 20¼.

Hingegen ist die Zahl 17 keine vollkommene Quadratzahl, weil sich ihre Wurzel nie genau und in aller Schärfe angeben läßt. Sie ist größer als 4 und kleiner als 5. Der Bruch aber, um welchen sie größer als 4 ist, läßt sich nie nach aller Schärfe bestimmen, denn es ist ein unendlicher Decimalbruch.

§. 9.

Größen (also auch Zahlen), die sich weder durch irgend ein Maß, noch durch einen aliquoten **) Theil dieses Maßes genau messen lassen,

---

*) Diese letztere Zahl ist die Hälfte von 4½.

**) Ein aliquoter Theil eines Ganzen ist ein solcher Theil, der, wenn er oft genug genommen wird, am Ende gerade das Ganze gibt. So ist 3 kein aliquoter Theil von 10, denn diese Zahl gibt nicht 10, wenn man sie 3 Mahl, und schon mehr als 10, wenn man sie 4 Mahl nimmt. Aber von

heißen irrational, alle übrigen aber, also alle, die sich durch irgend ein Maß oder durch einen aliquoten Theil dieses Maßes messen lassen, heißen rational.

Alle ganze Zahlen sind Rational-Zahlen, denn sie lassen sich durch ein Maß, nämlich durch die Einheit, genau ausmessen, d. h. in einer jeden ganzen Zahl ist die Einheit gerade so oft enthalten, als die Zahl anzeigt. In der Zahl 17 ist z. B. die Einheit 17 Mahl enthalten, es kann also 17 durch die Einheit genau gemessen werden.

Alle Brüche, deren Glieder alle angegeben sind, sind Rational-Zahlen, denn sie lassen sich durch einen aliquoten Theil der Einheit ausmessen. Es ist z. B. $\frac{1}{7}$ ein aliquoter Theil des Ganzen, denn wenn man ein $\frac{1}{7}$ genug nimmt, so erhält man am Ende gerade das Ganze. Der Bruch $\frac{5}{7}$ ist eine Rational-Zahl, denn durch einen aliquoten Theil des Ganzen, nämlich durch $\frac{1}{7}$ läßt er sich genau ausmessen; $\frac{1}{7}$ ist 5 Mahl in $\frac{5}{7}$ enthalten.

Alle Wurzelgrößen hingegen, die weder durch eine ganze Zahl, noch durch irgend einen Bruch genau dargestellt werden können, sind ir-

---

15 ist 3 ein aliquoter Theil. Ein Zoll ist ein aliquoter Theil eines Schuhes; denn 12 Mahl genommen gibt er (der Zoll) den Schuh.

rational. So kann z. B. die Wurzel von 17 weder durch eine ganze Zahl, noch durch irgend einen Theil der Einheit genau angegeben werden; diese Wurzel ist also eine Irrational-Zahl.

Wenn z. B. ein Parallelogramm von 17 Quadrat-Schuhen in ein Quadrat verwandelt werden sollte, so ließe sich die Seite dieses Quadrats nie genau angeben. Sie müßte über 4 Schuh lang seyn, die Länge aber über 4 Schuh läßt sich durch keinen Theil des Schuhes ausmessen. Den $4\frac{1}{10}$ Schuh erreichten die Länge der Linie noch nicht, und es bliebe noch ein Stückchen zu messen übrig, das kein $\frac{1}{10}$ mehr betrüge. Wollte man die Theile des Schuhes kleiner machen und Hunderttel annehmen, so betrüge die Länge $4\frac{12}{100}$ Schuh, aber nun bliebe wieder ein Stückchen zu messen übrig, welches kleiner als ein Hunderttel ist. Machte man nun die Theile der Einheit noch kleiner, und nähme Tausendtel an, so betrüge gedachte Linie $4\frac{123}{1000}$ Schuh, aber nun wäre noch ein Stückchen zu messen übrig, das wieder nicht mit einem Tausendtel gemessen werden könnte, weil es kleiner als ein Tausendtel wäre. Und wenn man Zehntausendtel und Hunderttausendtel u. s. w. eines Schuhes zum Maße annehme, so würde doch die Linie nicht genau ausgemessen werden können, denn der Bruch, der die Länge über die 4 Schuh anzeigt, ist ein unendlicher Decimalbruch, die Wurzelgröße von 17 also irrational. Indessen kann man

sich dem wahren Werthe der Irrational-Größe durch fortgesetztes Suchen von Decimalstellen so sehr nähern als man will, und ein Quadrat dessen Seite 4,123 Fuß hielte, würde schon ziemlich genau 17 Quadratfuß Flächenraum in sich schließen.

§. 10.

Auch Brüche lassen sich auf das Quadrat erheben, oder quadriren, wenn man sowohl den Zähler als den Nenner quadrirt; allein das Quadrat eines Bruches ist alle Mahl kleiner als der Bruch (die Wurzel). Die Wurzel eines Bruches ist ein Bruch, den man erhält, wenn man die Quadratwurzel des Zählers zum Zähler, die Wurzel des Nenners zum Nenner nimmt.

Das Quadrat von $\frac{3}{4}$ ist demnach $\frac{9}{16}$, denn $\frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$. Aber $\frac{9}{16}$ ist weniger als $\frac{3}{4}$, weil $\frac{12}{16}$ auf $\frac{3}{4}$ gehen. Die Wurzel von $\frac{25}{49}$ ist $\frac{5}{7}$, denn die Wurzel vom Zähler 25 ist 5, und vom Nenner 49 ist sie 7. Um übrigens das Quadriren eines Bruches den Lesern recht deutlich zu machen, sind auf der angehängten Kupfertafel einige Zeichnungen beigefügt und dadurch die Sache erläutert. Die Linie A B (Fig. 1.) soll einen Fuß lang, das darauf errichtete Quadrat also ein Quadratfuß seyn. Wir theilen nun die Linie A B, die Einheit also, in 8 gleiche Theile, A f, fg, gh, hi, ik, kl, lm, mB und nehmen

3 davon, nämlich Af, fg, gh. Wir haben also $\frac{3}{8}$ von der Linie AB. Auf diesen $\frac{3}{8}$ errichten wir das Quadrat AEFh. Wie viel von dem ganzen Quadrate beträgt nun das Quadrat AEFh? Nicht etwa $\frac{3}{8} = \frac{24}{64}$, sondern $\frac{9}{64}$.

Quadriren wir den Bruch $\frac{2}{3}$, so erhalten wir, indem wir den Zähler, so wie den Nenner mit sich selbst multipliciren, $\frac{4}{9}$. Nehmen wir von der Seite des Quadrats ABCD (Fig. 2.) $\frac{2}{3}$, nämlich DE und EF, und errichten darauf ein Quadrat, so beträgt dieses, wie Fig. 3. zeigt gerade $\frac{4}{9}$ vom Ganzen. Auf diese Weise läßt sich das Quadrat eines jeden Bruches sinnlich darstellen und mit dem Ganzen vergleichen.

§. 11.

Wird eine Wurzel nur mit Einer Ziffer geschrieben, so wird sie eintheilig (monomisch), wird sie mit 2 Ziffern geschrieben, so wird sie zweytheilig (binomisch), wird sie mit mehr als 2 Ziffern geschrieben, so wird sie vieltheilig (polynomisch) genannt.

Die Quadrate der eintheiligen Wurzeln liegen alle im Einmahleins, und sind jedem, der dieses kann, bekannt. Die Quadrate der zwey- und mehrtheiligen Wurzeln werden gefunden, wenn man die gegebene Wurzel, wie aus der Erklärung einer Quadratzahl schon hervorgeht, mit sich selbst multiplicirt. Es ist nöthig, die

einzelnen Producte, die in dem Totalproduct einer zweytheiligen Wurzel enthalten sind, genau zu kennen, um den Grund des Verfahrens beym Ausziehen der Quadratwurzel einzusehen, und daher wollen wir hier ein solches Product genau betrachten. Um aber dieses thun können, müssen wir es in seine einzelnen (Partial-) Producte zerlegen.

Es sey die Quadratzahl von 36. Diese wird also gefunden, wenn wir die Producte alle einzeln herschreiben:

$$\begin{array}{l} 36 \\ 36 \\ \hline \end{array}$$

a) $36 = 6 \times 6 = 6^2 = 36$
b) $18. = 6 \times 30 = 180$
c) $18. = 6 \times 30 = 180$
d) $9.. = 30 \times 30 = 30^2 = 900$

$1296 \qquad\qquad 1296$

Wenn wir 6 den zweyten Theil, 3 aber, nämlich 3 Zehende, also eigentlich 30, den ersten Theil der Wurzel nennen, so haben wir bey a das Quadrat des 2ten Theiles der Wurzel; bey b das Product aus dem 2ten in den ersten Theil der Wurzel, nämlich $6 \times 30 = 180$; bey c abermahls das Product aus dem 2ten Theil in den ersten, denn 30×6 ist ja so viel als 6×30; bey d endlich das Quadrat des ersten Theiles der Wurzel, nämlich $30 \times 30 = 30^2 = 900$. Dem-

nach ist in der Summe 1296, oder im Totalproducte, das wir auch erhalten, wenn wir auf die gewöhnliche Weise, nämlich also:

36
36
216
108
1296

multipliciren, enthalten: 1) das Quadrat des ersten Theiles der Wurzel, 2) das doppelte Product aus dem ersten in den zweyten Theil der Wurzel, oder: das doppelte Product des einen Theiles der Wurzel in den andern, 3) das Quadrat des zweyten Theiles der Wurzel. Und dieses ist der Fall bey jeder Quadratzahl einer zweytheiligen Wurzel. Diesen wichtigen Satz, der wohl gefaßt und behalten werden muß, wollen wir noch durch eine Zeichnung erläutern. Es seyen Fig. 4 die Linien AE und EB gegeben. Wir vereinigen beyde Theile zu einer einzigen Linie, und errichten darauf das Quadrat ABCD. Dieses Quadrat aber besteht aus folgenden 4 Theilen: 1) aus dem Quadrate des kleinern Theiles der Linie AB, nämlich aus dem Quadrate der Linie EB; 2 und 3) aus den 2 Parallelogrammen AEGH und FCIG, wovon jedes zur längern Seite hat die Linie AE und zur kürzern die Linie EB; 4) aus dem Quadrate

drate des größern Theiles der Linie AB, nämlich aus dem Quadrate der Linie AE = HG. Hielte nun die Linie AE 6 Schuh, die Linie EB aber 3 Schuh und wir wollten den Flächeninhalt aller einzelnen Figuren im Quadrate ABCD finden; so müßten wir multipliciren: 1) die Seite des kleinern Quadrates mit sich selbst und sprechen: 3 × 3 = 9; 2) die Seite EG = EB mit der Seite AE und sprechen: 3 × 6 = 18; 3) Dieses Product müßten wir doppelt nehmen, weil auch das Parallelogramm FCIG = AEGH seinem Inhalte nach noch müßte genommen werden; 4) die Seite HG = AE mit sich selbst, indem wir sprechen 6 × 6 = 36. Wir bekämen demnach folgende Partialproducte: 9, 18, 18, 36. Diese addirt geben die Summe 81.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 18 \\ 18 \\ \underline{36} \\ 81 \end{array}$$

Diese Zahl aber ist die Quadratzahl von 9, denn 9 × 9 = 81. Folglich gäben die vereinigten Linien AE und EB ein Quadrat, das so viel Quadratschuhe gibt, als die 4 Theile des Quadrates ABCD zusammengenommen. Nun enthält

a) das Quadrat EBFG 9 Schuh (9 ist das Quadrat von 3.

b) das Parallelogramm F C I G 18 Schuh (18 ist das Product aus 3 × 6

c) das Parallelogramm A E G H 18 Schuh (18 ist das Product von 3 × 6

d) das Quadrat H G I D 36 Schuh (36 ist das Quadrat von 6.

Wenn wir demnach die Zahl 9 zerlegt denken in die 2 Theile 6 und 3, so besteht die Quadratzahl von 9 a) aus dem Quadrate des einen Theiles

b) aus dem doppelten Producte des einen Theiles in den andern

c) aus dem Quadrate des andern Theiles.

Die 5te Figur, wo alle einzelne Figuren der 4ten Figur in Quadratschuhe*) abgetheilt sind, erlaütert dieses noch mehr. Wir finden die Zahl aller kleinern Quadrate auf einmahl, wenn wir die Seite des Quadrates A B C D, die 9 Schuh hält, mit sich selbst multipliciren. Wir finden aber auch diese Zahl, wenn wir das Quadrat aus 3, das doppelte Product aus 3 in 6, und das Quadrat von 6, oder den Flächeninhalt aller einzelnen, in der 4ten Zeichnung enthaltenen, Figuren suchen.

---

*) Quadratschuhe werden hier angenommen; es können Quadratzolle &c. seyn.

Aus dem gegebenen Beyspiele sehen wir übrigens, daß nicht bloß zweyzifferige, sondern auch einzifferige Wurzeln als in 2 Theile zerlegt gedacht werden können, und daß der eben aufgestellte Satz auch von diesen letztern gilt. Uebrigens bemerken wir noch, daß dieser Satz im allgemeinen also ausgedrükkt wird, wenn a den ersten und b den 2ten Theil der Wurzel bedeutet: das Quadrat einer 2theiligen Wurzel besteht aus $a^2 + 2ab + b^2$.

§. 12.

Das Quadrat einer eintheiligen Wurzel kann nur eine, kann aber auch 2 Ziffern haben.

Denn $1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$

Hängen aber Nullen an den Ziffern von 1 — 9, so hat das Quadrat doppelt so viel Nullen, als deren die Wurzel hat, denn

10^2	=	100	400^2	=	160000
20^2	=	400	500^2	=	250000
30^2	=	900	600^2	=	360000
40^2	=	1600	700^2	=	490000
50^2	=	2500	800^2	=	640000
60^2	=	3600	900^2	=	810000
70^2	=	4900	1000^2	=	1000000
80^2	=	6400	2000^2	=	4000000
90^2	=	8100		u. s. w.	
100^2	=	10000	10000^2	=	100000000
200^2	=	40000	20000^2	=	400000000
300^2	=	90000	30000^2	=	900000000
				u. s. w.	

Demnach hat das Quadrat der Ziffern von 1 — 9 mit angehängten Nullen so viel Paare von Nullen, als die Wurzel einzelne Nullen hat, und zur Linken noch das Quadrat der an sich geltenden *) Wurzel-Ziffer. Da aber das Quadrat der Zahlen von 1 — 9 theils mit einer, theils mit 2 Ziffern ausgedrükkt wird, so kann das Quadrat einer Zahl, die mit einer Ziffer von 1 — 9 und mit angehängten Nullen geschrieben wird, bald aus doppelt so viel Ziffern (die Nullen als solche mit betrachtet) bestehen, als deren die Wurzel hat, bald aber nur aus doppelt so viel weniger einer (Ziffer). So hat das Quadrat von 90 = 8100 doppelt so viel Ziffern als

*) Die Ziffern von 1 — 9 gelten an sich, die Nullen für sich allein gelten aber nichts.

die Wurzel; das Quadrat von 30 aber nur doppelt so viel weniger einer.

Wenn man daher eine Quadratzahl, die aus Nullen mit einer oder 2 zu ihrer Linken stehenden an sich geltenden Ziffern von der Rechten nach der Linken zu in Fächer oder Classen theilt, und jeder Classe zwey Ziffern gibt (die letzte zur Linken kann auch nur eine haben, wenn die Zahl der Ziffern ungleich ist); so erhält man gerade so viel Classen als die Wurzel Ziffern hat.

Behandeln wir z. B. die Zahlen 400, 900, 1600, 490000, 16000000, also und theilen:

A) |4|00|
B) |9|00|
C) |16|00|
D) |49|00|00|
E) |16|00|00|00|

So erhalten wir bey A, B und C zwey Classen und sehen daraus, daß die Wurzel von 400, 900 und 1600 nur 2 Stellen oder Ziffern hat;

Bey D aber 3 Classen, woraus wir sehen, daß die Wurzel 3 Ziffern haben müsse;

Bey E 4 Classen, woraus zu schließen ist, daß die Wurzel auch mit 4 Ziffern geschrieben werden müsse.

Nun entsteht aber die Frage: wie aber, wenn Wurzel und Quadrat nicht mit Nullen, sondern mit andern Ziffern schließen? Sind in diesem

Falle auch in der Wurzel so viel Ziffern als die Quadratzahl Classen hat, wenn sie auf die vorhin bemerkte Art eingetheilt worden ist?

Wir wollen sehen.

Die meistgeltende Ziffer, die an einer 1 statt einer Null stehen kann, ist 9. Das Quadrat von 19 ist aber 361. Diese Zahl in Classen, wie gezeigt ist, getheilt, gibt der Classen 2. Die meistgeltende Ziffer, die als Zehner mit einer 9 in der Einerstelle verbunden werden kann, ist auch 9. Das Quadrat von 99 ist 9801, hat folglich auch doppelt so viel Ziffern als die Wurzel 99.

Das Quadrat von den 3 niedrigsten (an sich geltenden) Ziffern, nämlich von 111, ist 12321, und von den 3 höchsten, nämlich von 999 ist 998001; beyde Quadrate bestehen aber aus 3, also aus so viel Classen, als die Wurzel Ziffern hat.

Und so läßt sich darthun, daß jede Quadratzahl aus so viel Classen von Ziffern bestehe, als die Wurzel einzelne Ziffern hat, nur kann, was schon oben bemerkt worden ist, die letzte Classe zur Linken auch bloß eine einzige Ziffer haben.

§ 13.

Es läßt sich ausmitteln, was für Producte oder welche Partialproducte in jeder Classe liegen.

Wenn wir die Classen, so wie die Ziffern der Wurzeln von der Linken gegen die Rechte zählen, so liegt in der ersten Classe das Quadrat der ersten, in der 2ten Classe das Quadrat der 2ten (Ziffer), in der dritten das Quadrat der 3ten Ziffer u. s. w.

Dieses werden folgende Beyspiele zeigen:

```
      A)                    B)
      32                    36
      32                    36
    ------                ------
    a) 4                  a) 36
   b) 6.                 b) 18.
   c) 6.                 c) 18.
  d) 9..                d) 9..
 ---------             ---------
 |10|24|               |12|96|
```

Hier ist bey A das Quadrat der ersten Ziffer 9 (eigentlich 900) und bezeichnet mit d, mit in der ersten Classe enthalten. Das mit a bezeichnete Quadrat der 2ten Ziffer, nämlich 4, ist aber in der 2ten Classe enthalten.

```
          C)
          426
          426
        ------
       a) 36
      b) 12.
     c) 24..
      d) 12.
      e) 4..
     f) 8...
     g) 24..
     h) 8...
   i) 16....
  -----------
   18|14|76
```

Hier in dem Beyspiele C ist das Quadrat der ersten Ziffer, nämlich 16 (eigentlich 160000), das unten bey i einzeln steht, mit in der ersten Classe, nämlich in 18 (eigentlich 180000) enthalten.

Das Quadrat der 2ten Ziffer, nämlich 4 (eigentlich 400, das bey e einzeln steht, ist mit in der 2ten Classe, nämlich in 14 (eigentlich 1400) enthalten.

Das Quadrat der dritten Ziffer, nämlich 36, das bey a einzeln steht, ist beym Addiren der Partial-Producte mit in die 3te Classe gekommen und ist mit enthalten in 76.

Bey weiterer Untersuchung finden wir daß das Quadrat einer Ziffer *) alle Mahl in der niedrigsten Ziffer der ihr (der Wurzelziffer) entsprechenden Classe anfängt, oder darin seine niedrigste Ziffer mit hat und sich zuweilen nicht weiter als in diese Ziffer, zuweilen aber in die nächst höhere mit erstrekkt.

In dem vorhergehenden Beyspiele A liegt das Quadrat der zweyten Ziffer, nämlich 4, auch einzig und allein in der niedrigsten Ziffer der zweyten Classe, und das Quadrat der ersten

---

*) Diese Redensart wird der Kürze wegen gewählt, denn eigentlich sollte es heißen: das Quadrat der Zahl, welche durch die eine Ziffer angezeigt (ausgedrükkt) wird.

Ziffer, nämlich 9, läge, wenn nichts dazu gezählt würde, in der niedrigsten Ziffer der ersten Classe.

In dem Beyspiele B aber fängt das Quadrat der 2ten Ziffer, nämlich 36, mit in der niedrigsten Ziffer der 2ten Classe an und erstrekkt sich mit hinüber in die nächst höhere Ziffer dieser Classe. Denn in 96, den Ziffern der zweyten Classe, ist 36, das Quadrat der 2ten Wurzelziffer, mit enthalten.

Was wir in diesen Beyspielen bemerkt haben, findet überall Statt, und in jeder Quadratzahl fängt das Quadrat einer Ziffer in der niedrigsten Ziffer der ihr zugehörenden Classe an, liegt bisweilen nur darin allein, erstrekkt sich aber auch bisweilen bis in die nächst höhere Ziffer.

Nun entsteht noch die Frage: wo stekken die doppelten Producte aus den beyden Theilen einer zweytheiligen Wurzel ineinander?

Diese sind alle-Mahl mit den Quadraten vereinigt, haben aber ihre niedrigste Ziffer immer in der höchsten Stelle des Faches und können sich bis in die 2 Ziffern des nächst höhern Faches erstrekken.

Das bisher Gesagte kann auch also gefaßt werden:

1) Das Quadrat der Einer einer zweytheiligen Wurzel fängt sich in den Einern (des Totalproductes) an, und erstrekkt sich, wenn es

nicht in diesen allein liegt, höchstens bis in die Zehner.

2) Das doppelte Product aus den Einern in die Zehner fängt sich in den Zehnern an und erstrekkt sich höchstens bis in die Tausende.

Folgende Beyspiele erläutern dieß:

A)	B)
99	12
99	12
a) 81	4
b) 81.	2.
c) 81.	2.
d) 81..	1..
9801	144

Das Quadrat von 9 (im Beyspiele A), dem höchsten Einer, ist 81, erstrekkt sich also von den Einern bis in die Zehner, wie a zeiget. Das Quadrat von 90, der größten Anzahl Zehner, welches = 8100 ist, fängt in den Hunderten an und geht bis in die Tausende, wie d zeiget. Das doppelte Product aus den Einern in die Zehner fängt sich, wie b und c zeigen, in den Zehnern an, und geht bis in die Tausende, denn 810 + 810 = 1620.

Hingegen in dem Beyspiele B liegt

1) Das Quadrat der Einer auch bloß in den Einern des Totalproductes.

2) Das doppelte Product der Einer in die Zehner liegt auch bloß in den Zehnern des Totalproductes.

3) Das Quadrat des Zehners liegt bloß in dem Hunderter des Totalproductes.

Zweyter Abschnitt.

Vom Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 14.

Nunmehr können die Regeln zur Ausziehung der Wurzel einer vollkommenen Quadratzahl, die das Product einer zweytheiligen Wurzel ist, gegeben, und ihre Gründe eingesehen werden.

1) Mache dir ein Quadrat= (und um der Folge willen auch zugleich ein Cubik=) Täfelein, wie folget:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadratz.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubikz.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

2) Theile die gegebene Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Fächer oder Classen

und gieb jeder Classe 2 Ziffern, doch kann die letzte Classe zur Linken auch nur Eine Ziffer haben. Z. B. |21|16|

|2|25|

3) Jetzt betrachte die äußerste oder erste Classe zur linken Hand ganz für sich, und suche in dem Quadraitäfelein eine Quadratzahl, die dieser (in der gedachten Classe befindlichen) Zahl entweder gleich oder zwar kleiner ist, doch ihr am nächsten kommt. Diese Zahl setze unter die Zahl der gedachten Classe, ziehe sie dann von der obern ab, und die Wurzel, welche zu der untergesetzten, aus dem Quadrattäfelein genommenen, Zahl gehört, setze in die Stelle, wohin man beym Dividiren die Quotienten setzt, so hast du den einen (ersten oder höchsten) Theil der Wurzel. Z. B.

```
 a  b
|21|16|4
|16|
-----
  5
```

Der Zahl 21 ist unter den im Quadrattäfelein enthaltenen Quadraten keines gleich, daher nehmen wir daraus ein Quadrat, das zwar kleiner als 21 ist, doch dieser Zahl am nächsten kommt, und das ist 16. Diese Zahl ziehen wir von 21 ab, wodurch wir den Rest 5 bekommen, und die Wurzel von 16 = 4 setzen wir hin, wohin die Quotienten gehören.

Durch das oben Gesagte wissen wir nämlich, daß in jeder Classe die Quadratzahl irgend einer Ziffer von 1 — 9 enthalten ist; es muß also auch in der vor uns liegenden Classe a die Quadratzahl irgend einer Ziffer von 1 – 9 liegen. Es kann dieß aber keine andere Quadratzahl als 16 seyn, weil diese allein die nächste Zahl an 21 ist. Wir nehmen also diese Quadratzahl, ziehen sie von 21 ab, und ziehen nun

4) die nächstfolgende Classe (in unserm Beyspiele b) zum Reste herunter. Jetzt sieht das Exempel also aus:

```
  a  b
|21|16|4
|16|..|
--------
 5|16
```

Nun haben wir in diesem Reste, verbunden mit der übrigen herunter gezogenen Zahl, das doppelte Product aus dem einen Theil der Wurzel in den andern und das Quadrat des andern Theiles (des Einers) der Wurzel. Das doppelte Product der Einer in die Zehner fängt sich aber, wie wir oben gesehen haben, in der Stelle der Zehner an, daher muß man

5) den bereits gefundenen Theil der Wurzel verdoppeln, die durch diese Verdoppelung gefundene Zahl unter die höchste Ziffer der herabgezogenen Classe setzen und damit in die darüber stehende Zahl (im Beyspiele 51) dividiren und den Quotienten rechts neben

den bereits gefundenen Theil der Wurzel setzen, nämlich also:

|21|16|46
|16| |
――――――
5|16
8

Nun setze man

6) den zuletzt gefundenen Theil der Wurzel (hier 6) rechts neben den Divisor 8, schließe beyde Zahlen (86) in Klammern und multiplicire sie (die Zahlen 86) mit dem zuletzt hingesetzten Theile der Wurzel (im Beyspiele mit 6), schreibe das Product von der Rechten gegen die Linke, indem man zu schreiben anfängt unter der niedrigsten Ziffer der herabgerückten Classe, und ziehe das durch diese Multiplication gefundene Product von der über den eingeklammerten Ziffern bemerkten Zahl ab. Das Exempel sieht dann so aus:

21|16|46
16|..|
――――――
5|16|
(86)
516
000

Der Grund der 5ten Regel ist folgender: Wenn uns ein Product und der eine Factor gegeben ist, so läßt sich der andere unbekannte Factor finden, wenn wir mit dem gegebenen Factor in das gegebene Product dividiren. Nun

wissen wir in dem vorliegenden Beyspiele, daß 516 nicht das einfache, sondern das doppelte Product aus dem gefundenen Theil der Wurzel (im Beyspiele 4) in den noch unbekannten Theil ist. Das doppelte Product aus 2 Factoren ist aber so viel als das einfache Product aus dem einen Factor in den andern, diesen doppelt genommen. Denn wenn wir z. B. sprechen: $4 \times 6 = 24$, und $2 \times 24 = 48$; so ist das eben so viel, als wenn wir sprächen: 8 (so viel als 4 verdoppelt) Mahl 6 ist 48. Wenn wir daher 4 verdoppeln und in die Zahl 51 (eigentlich 510) dividiren, so müssen wir den andern Factor finden, der hier 6 ist. Nun liegt aber in $510 + 6 = 516$ nicht bloß das doppelte Product aus 4 (eigentlich 40) in 6, sondern auch das Quadrat von 6. Daher suchen wir, indem wir (was bloß der Bequemlichkeit wegen geschieht) die 6 noch unter die niedrigste Ziffer der herabgerückten Classe setzen, und beyde eingeklammerte Zahlen, nämlich 8 und 6, mit 6, dem zuletzt gefundenen Theile der Wurzel, multipliciren, beydes, nämlich das Quadrat von 6 und das Product aus 6 in 8 (den verdoppelten einen Factor) in einem einzigen Producte. Wir finden es in der Zahl 516, die der oben stehenden Zahl gleich ist, daher beym Abziehen nichts übrig bleiben kann, ein Beweis, daß wir in 2116 eine vollkommene Quadratzahl hatten.

Nun wollen wir noch aus verschiedenen gegebenen Quadratzahlen die Wurzeln ziehen.

```
|32|49|57
|25|  |
---------
 •749
 (107)
  709
---------
  •••
```

Hier wurde

1) die gegebene Quadratzahl 3249 auf die oben angegebene Art in Classen getheilt;

2) im Quadrattäfelein eine Quadratzahl, die der in der ersten (zur Linken stehenden) Classe enthaltenen Zahl am nächsten kommt, gesucht, (es ist dieß die Zahl 25), untergesetzt und von der obern (32) abgezogen, zugleich aber auch die Wurzel von der unter 32 gesetzten Quadratzahl hinter den 3ten Vertikalstrich gesetzt;

3) die nächst folgende Classe herunter zu dem Reste 7 gezogen, der gefundene Theil der Wurzel verdoppelt, dieses Product so untergesetzt, daß seine niedrigste Ziffer (die Null) unter die höchste der herunter gezogenen Klasse zu stehen kam, seine nächstfolgende höhere Ziffer aber weiter gegen die Linke zu geschrieben wurde;

4) mit 10 (dem Doppelten von 5) in die darüber stehende Zahl 74 dividirt, und der da-

durch gefundene Quotient 7 nicht nur als 2ter Theil der Wurzel neben die 5, sondern auch rechts neben den Divisor 10 gesetzt;

5) Mit dem zuletzt gefundenen Quotienten 7 die untergesetzte und eingeklammerte Zahl 107 multiplicirt, wodurch das Product 749 gefunden wurde. Dieses Product, von der oben stehenden Zahl 749 abgezogen, gibt Null zum Reste, welches wieder ein Beweis ist, daß 3249 eine vollkommene Quadratzahl ist.

```
    |42|23|65            |42|23|64
    |36|  |              |36|  |
    ---------            ---------
      ,623                 ,623
A) (125)             B) (124)
     625                  496
    ---------            ---------
                          127
```

Hier wurde gesprochen bey A: 12 in 62 ist 5 Mahl enthalten. Als wir aber die eingeklammerten Zahlen 125 mit 5 multiplicirt hatten, sahen wir, daß das Product 625 nicht von 623 abgezogen werden könne. Wir verminderten also, wie beym gewöhnlichen Dividiren, den Quotienten um 1 und sprachen wie in B: 12 in 62 geht 4 Mahl, wodurch wir ein Product bekamen, das von 623 abgezogen werden konnte, wobey uns der Rest 127 blieb. Dieß ist aber ein Beweis, daß 4223 keine vollkommene Quadratzahl ist, sondern daß die Wurzel davon zwischen 64

und 65 fällt. Wollen wir nun die Probe machen und sehen, ob wir recht gerechnet haben, so müssen wir 64 mit sich selbst multipliciren und zum gefundenen Producte noch den Rest 127 addiren. Finden wir dadurch die Zahl 4223, so ist richtig gerechnet. Demnach sieht die Probe also aus:

```
  64
  64
----
 256
384
----
4096
 127
----
4223
```

Es ist wohl zu merken, daß, wenn beym Dividiren, wie hier bey A, am Ende eine Zahl gefunden würde, die (wie hier 625) größer wäre als die oben stehende, von welcher sie abgezogen werden muß, man den angenommenen Quotienten so lange um 1 vermindere, als es erforderlich ist.

Wenn man aus 9164 die Wurzel ziehen soll, in der Rechnung so weit:

```
|91|64|9
|81|..|
-------
  1064
  18
```

gekommen ist, wo man sprechen soll: 18 in 106, oder auch, wenn man den Divisor 18 theilt, 1 in 10; so wird man nach und nach vielleicht 9, 8, 7, 6 zum Quotienten annehmen, aber immer

finden, daß das erhaltene und von 1064 abzuziehende Product zu groß ist, bis man endlich den Quotienten 5 annimmt und also rechnet:

```
|91|64|95
|81|..|
---------
  1064
  (785)
   925
---------
   139
```

wodurch man findet, daß 9164 auch keine vollkommene Quadratzahl ist, und daß ihre Wurzel zwischen 95 und 96 fällt. Denn die Zahl 9164 ist um 139 größer als die Quadratzahl von 95, und 9164 ist kleiner als die Quadratzahl von 96, indem letztere 9216 ist, wie folgende Rechnungen lehren:

```
   95          96
   95          96
 ----        ----
  475         576
 855         864
 ----        ----
 9025        9216
```

Wenn bey dieser Rechnung zuletzt ein Rest bleibt, der größer ist, als das Doppelte der gefundenen Wurzel, um 1 vermehrt; so ist es ein Beweis, daß man den zuletzt gefundenen Theil der Wurzel zu klein genommen habe, und daß die niedrigste Ziffer derselben noch wenigstens um 1 größer sey. Bleibt dagegen ein Rest, der kleiner ist, als das Doppelte der gefundenen Wurzel, dieses Doppelte um 1 vermehrt; so hat die gegebene Zahl keine Quadratwurzel unter den

ganzen Zahlen: denn die schon gefundene Wurzel ist zu klein, und wenn man sie um 1 vermehrte, so wäre sie zu groß. Demnach hat in eben dem Falle die gegebene Zahl auch keine Wurzel unter den rationalen Brüchen, sondern die gesuchte Wurzel ist eine Irrationalzahl.

Um den Grund von dem Gesagten einzusehen, ist zu bemerken, daß alle Mahl das Quadrat der nächst höhern Zahl um das Doppelte der nächst vorhergehenden Zahl + 1 größer ist, als das Quadrat dieser nächst vorhergehenden Zahl.

Beyspiele.

1) Das Quadrat von 3 ist 9, das Quadrat von 4 ist 16. Dieses Quadrat ist aber um das Doppelte + 1 der nächst vorhergehenden Zahl oder der Wurzel von 9 größer, als das Quadrat der nächst vorhergehenden Zahl, nämlich 9, das Quadrat von 3. Denn 16 besteht aus 9 + 3 + 3 + 1.

2) Hat man das Quadrat von 4, also die Zahl 16, und will man daraus das Quadrat von 5 machen, so darf man nur die Wurzel von 16, nämlich 4, 2 Mahl nehmen und dieses Product noch um 1 vermehren. Denn 25 besteht 16 + 4 + 4 + 1.

3) Um aus 25 das Quadrat von 6 zu machen, legen wir zu dem Quadrate von 5, nämlich zu 25, noch dessen doppelte Wurzel und 1.

Denn 25 + 5 + 5 + 1 macht 36, welches die Quadratzahl von 6 ist.

Wir wollen diese Sache noch durch eine Zeichnung versinnlichen. Es sey aus Fig. 6. das Quadrat a b c d gegeben und seine Seite betrage 3 Zoll, so daß also sein Flächeninhalt 9 Quadratzoll hält. Nun soll seine Seite nach a e hin verlängert und um einen Zoll größer gemacht werden. Wir müssen also die Quadratzolle 1, 2, 3 oder das Rechtekk a e h b ansetzen. Nun kann aber ein Quadrat, wenn es ein Quadrat bleiben soll, nicht bloß in die Länge, sondern es muß auch in die Breite und zwar in gleichem Maße wachsen. Wir müssen also, wenn das Quadrat a b c d in seiner Seite um einen Zoll vergrößert werden soll, auch die Quadratzolle 6, 5, 4, oder das Rechtekk b g c f ansetzen. Ist dies geschehen, so haben wir die Figur h e d f g, welche kein Quadrat ist. Um dieses herzustellen; müssen wir noch den Quadratzoll h i g b in die leere Ekke schieben, wodurch sowohl die Seite e i, als die Seite f i erst 4 Zoll lang wird. Dadurch haben wir ein Quadrat bekommen, nämlich e i f d, welches 16 Quadratzoll enthält, da das vorhergehende, nämlich a b c d, deren nur 9 hielt. Um die Zahl 16 aus 9 zu bilden, bedurften wir 3 + 3 + 1. Oder: um aus einem Quadrate, das 9 Quadratzoll hat, ein anderes zu machen, das deren 16 hält, müssen wir 3 + 3 + 1 Quadratzoll hinzulegen. 9 und

16 sind die Quadratzahlen, deren Wurzeln 3 und 4 unmittelbar auf einander folgen und wir haben nun gesehen, daß das Quadrat der nächst höhern Zahl, nämlich das Quadrat von 4, gebildet wird aus dem Quadrate der nächst niedern Zahl, indem man diese nächst niedere Zahl doppelt und noch 1 dazu nimmt, und sie zu ihrem Quadrate addirt. Die nächst höhere Zahl von 4 ist 5. Wollen wir nun das Quadrat e i f d wieder um einen Zoll vergrößern, so müssen wir nicht nur die Quadrate 7, 8, 9, 10 und die Quadrate 11, 12, 13, 14, also doppelt so viel, als die Wurzel von 16 beträgt, hinzufügen, sondern auch noch ein Quadrat, das Quadrat 15, einschieben. Und nun haben wir in dem Quadrate A B C d ein Quadrat, dessen Seite 5 Zoll lang ist, das also 25 Quadratzoll in sich hält. 25 besteht aber aus 16 + 4 + 4 + 1, d. h. die Quadratzahl 25 entsteht aus der Quadratzahl 16, wenn wir zu dieser Zahl ihre verdoppelte Wurzel und noch 1 hinzufügen.

Wenn demnach aus 625 die Quadratzahl gezogen und dieselbe = 24 gefunden würde; so bliebe der Rest 49, wie folgende Rechnung lehrt:

```
|6|25|24
|4|..|
--------
  225
  (44)
  176
--------
  ·49
```

Dieser Rest beträgt aber gerade das Doppelte +1 von der gefundenen Wurzel 24, ist also ein Beweis, daß 625 nicht das Quadrat von 24 seyn könne, sondern das Quadrat von der nächst höhern Zahl, von 25, seyn müsse.

Nunmehr mögen die Leser versuchen aus folgenden Zahlen, die aber nicht alle vollkommene Quadratzahlen sind, die Wurzeln zu ziehen:

5041
7056
7182
8649
3136
3260

Man nehme nun folgende Quadratzahl

```
  A  B  ab
|60|84|78
|49|  |
---------
 1184
 (148)
 1184
---------
 0000
```

vor, theile sie in die Classen A und B, und suche sich nun folgende Fragen selbst zu beantworten. Kann man die Antwort nicht finden, dann erst lese man sie.

Aus wie viel Ziffern muß die Wurzel dieser Quadratzahl bestehen?

Aus 2 Ziffern.

Woher kann man dieses wissen?

Daher, weil die ganze Zahl 2 Classen hat.

Wir wollen den Zehner der Wurzel den Theil a, oder den ersten Theil und den Einer den Theil b, oder den 2ten Theil nennen, so wie die Classen A und B nennen. Was für ein Partialproduct stekkt nun in der Classe A?

Das Quadrat von dem Wurzeltheile a, oder das Quadrat von dem ersten Theile der Wurzel.

Woher weiß man dieses?

Aus dem oben Gesagten, wo gezeigt worden ist, daß das Quadrat der ersten oder höchsten Ziffer in der ersten Classe linker Hand, das Quadrat der 2ten oder nächst niedrigern Ziffer in der 2ten Classe u. s. w. enthalten sey.

Wie groß, oder welches muß die Quadratzahl seyn, die in der Classe A enthalten ist?

Die Quadratzahl 49, denn diese Quadratzahl kommt der Zahl 60 am nächsten.

Woher kommt aber der Ueberschuß 11, der über 49 noch in 60 enthalten ist?

Von dem doppelten Producte aus dem Einer der Wurzel in den Zehner.

Wo fängt dieses doppelte Product alle Mahl an, und wie weit erstrekkt es sich?

Es fängt alle Mahl in den Zehnern an und erstrekkt sich höchstens bis in die Tausender, wie hier der Fall ist.

Wenn wir den Ueberschuß 11 mit der folgenden Classe, also mit 84 verbinden, so daß wir 1184 bekommen; was ist nun alles in dieser Zahl enthalten?

Das doppelte Product des Einers in den Zehner und das Quadrat des Einers.

Wie findet man den einen Factor, wenn uns der andere nebst dem doppelten Producte gegeben ist?

Man verdoppelt den gegebenen Factor und dividirt damit in das gegebene Product, wo dann der Quotient der andere Factor ist.

Was folgt hieraus?

Daß wir den zuerst gefundenen

Theil der Wurzel verdoppeln und dieses Doppelte gehörig untersetzen. Gehörig untergesetzt wird es aber, wenn seine niedrigste Ziffer unter die höchste Ziffer der Classe, in der das doppelte Product anfängt, gesetzt, die übrigen Ziffern aber, wenn deren mehrere sind, weiter gegen die linke Hand zu gar geschrieben werden. Ist nun dieses geschehen, so wird mit dieser untergesetzten Zahl in die darüber stehende dividirt, wodurch der noch übrige Theil der Wurzel gefunden wird. Um aber zu sehen, ob dieser so gefundene Quotient der richtige Theil der Wurzel sey, so wird sein Quadrat mit dem Producte aus dem untergesetzten Divisor und ihm (dem zuletzt gefundenen Theile der Wurzel) vereinigt und von der oben stehenden Zahl abgezogen, wo denn, wenn die Wurzel aus einer vollkommenen Quadratzahl zu suchen war, kein Rest bleiben darf. Denn es ist ja, wie gesagt, in der obern Zahl (im vorliegenden Beyspiele in 1184) nichts als das doppelte

Product des einen Theils der Wurzel in den andern und das Quadrat der Einer enthalten.

Im vorliegenden Beyspiele ist die Wurzel 78. Wenn wir nun 8 × 70 nehmen, so bekommen wir 560; diese Zahl 2 Mahl genommen gibt 1120, dazu noch die Quadratzahl von 8 = 64 gethan, gibt 1184.

§. 15.

Mit dem Ausziehen einer zweytheiligen Wurzel wird es nun wohl keine Schwierigkeit mehr haben. Aber wie findet man eine vieltheilige Wurzel? In der Hauptsache auf die nämliche Art, wie man eine zweytheilige findet. Wir wollen hier eine 4theilige Wurzel ausziehen und nachher die Gedankenreihe, die uns bey diesem Geschäfte geleitet hat, angeben.

```
|41|37|06|24|6432
|36|..|..|..|
 ·537....
 (124)....
  496....
 ·4106..
 (1283).
  3849..
 ·25724
 (12862)
  25724
 ·····
```

Hier wurden die beyden ersten Classen (von der Linken gegen die Rechte gezählt) behandelt, als wenn sie nur allein dastünden, also ganz nach den vorhin gegebenen Regeln, wodurch wir in der Wurzel 64 gefunden haben. Nun war 41 von der 2ten Classe übrig. Dazu hohlten wir die 3te Classe, nämlich 06 herunter und thaten, als wenn 64 der zuerst gefundene Theil der Wurzel wäre. Deßwegen verdoppelten wir nach der oben gegebenen Regel diese Zahl und fingen an, das dadurch gefundene Product 128 unter der höchsten Ziffer der herab gerükkten Classe zu schreiben und seine übrigen Ziffern weiter gegen die Linke zu fortzusetzen. Mit 128 dividirten wir in 410, wodurch wir den Quotienten 3 bekamen. Diesen setzten wir nun auch rechts neben den Divisor 128, schlossen die 4 Ziffern in Klammern, und multiplicirten alle mit dem Quotienten 3, jedes Product unter die ihm zugehörige Ziffer schreibend. Wir bekamen das Totalproduct 3849. Dieses zogen wir von 4106 ab, wodurch wir den Rest 257 bekamen. Zu diesem Reste hohlten wir abermahls eine neüe Classe (hier die letzte) herunter und betrachteten nun die 643 als den zuerst gefundenen Theil der Wurzel, weßwegen wir auch ihn verdoppelten, um einen neüen Divisor zu erhalten. Es war der Divisor 1286, entstanden aus 2 × 643. Diesen setzten wir wieder so unter, daß seine niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgerükkten Classe zu stehen kam

und dividirten damit in 2572, wodurch wir den Quotienten 2 erhielten. Diesen setzten wir rechts neben den erst angezeigten Divisor und multiplicirten nun die ganze in Klammern stehende Zahl 12862 damit, wodurch wir das Product 25724 bekamen. Diese Zahl von der oben stehenden abgezogen, gab 0 zum Reste, und wir haben zur Wurzel erhalten 6432.

Auf diese Weise läßt sich jede Quadratwurzel finden, sie mag so viel Ziffern haben als sie will. Immer wird, so lange eine neue Classe herunter zu rükken ist, der gefundene Theil der Wurzel, er mag aus so viel Ziffern bestehen, als er will, verdoppelt und als Divisor gehörig untergesetzt, und die Operation betrieben als wenn nur 2 Classen vorhanden wären, oder die Wurzel nur aus 2 Ziffern bestünde.

Wir wollen nun noch eine vierzifferige Wurzel ausziehen.

```
    |36|60|25|00|6050
    |36|..|..|..|
    ------
     .60 .. ..
  a) (120).. ..
      000.. ..
    ----------
      6025 ..
     (1205) ..
  b)  6025 ..
     ---------
      000000
     (12100)
      00000
     ---------
      . . . . .
```

Hier könnten vielleicht die Nullen dem Anfänger einige Schwierigkeit verursachen und daher wollen wir die hier nöthigen Bemerkungen beyfügen.

Als die 2te Classe, nämlich 60, herunter gerükkt, und der bereits gefundene Theil der Wurzel, nämlich 6, verdoppelt und untergesetzt war, so mußten wir bey a sprechen: 12 in 6 und das ging natürlich 0 Mahl, deßwegen wurde die 0 auch als Quotient neben die 6 und dann auch neben den Divisor 12 gesetzt und verfahren wie gewöhnlich. Als 60 verdoppelt und damit (mit 120) dividirt und der Quotient 5 gefunden, auch alles gehörig multiplicirt und subtrahirt war, so blieben uns bey b lauter Nullen. Nun war noch eine ganze Classe, die aber auch nur aus 2 Nullen bestand, herunter zu rükken. Wir haben das gethan und die Operation vollständig verrichtet, ob wir gleich auf eine kürzere Weise nur noch eine Null an den bereits gefundenen Theil der Wurzel hätten hängen dürfen. Denn aus dem oben Gesagten erhellet, daß die Wurzel zur Rechten so viel einzelne Nullen habe, als die Quadratzahl zur Rechten Paare von Nullen hat.

Zur Uebung mögen meine Leser auch noch folgende Exempel durchrechnen.

Die Wurzel aus 40347904 soll gefunden werden.

```
|40|34|79|04|6352
|36|..|..|..|
 •434 .. ..
 (123).. ..
  369 .. ..
  •6579 ..
  (1265)..
   6325 ..
  •25404
  (12702)
   25404
   00000
```

Aus der folgenden Zahl soll auch die Wurzel gefunden werden.

```
   |9|42|79|70|25|30705
   |9|..|..|..|..|
    •42 .. .. ..
 a) (60).. .. ..
     00 .. .. ..
     4279 .. ..
     (607).. ..
     4249 .. ..
      ••3070
 b) (6140)..
      0000 ..
      307025
      (61405)
      307025
      000000
```

Hier wurde bey a abermahls gesagt: 6 in 4 geht Null Mahl, die Null wurde dann in die Stelle des Quotienten und auch neben die 6 gesetzt, und verfahren, wie die Regel will.

Bey b war der Fall, wo eine Null als

Quotient hingesetzt werden mußte, auch wieder vorhanden. Und nun, wenn solche Fälle wieder vorkommen, wird keiner meiner Leser einen Anstand dabey finden.

§. 16.

Nicht alle Zahlen sind, wie wir oben schon bemerkt haben, vollkommene Quadratzahlen, es lassen sich also auch nicht von allen Zahlen die Quadratwurzeln genau finden. Indessen kann man sich ihrem Werthe so sehr nähern, daß am Ende der noch fehlende Bruchtheil kleiner ist, als jedes gedachte Stükk der Einheit (quovis dato minus). Es geschieht dieses, indem wir der in ganzen Zahlen gefundenen Wurzel noch einen Decimalbruch von einer beliebigen Anzahl von Stellen anhängen.

Wir wollen nun aus einigen unvollkommenen Quadratzahlen die Wurzeln ziehen.

```
|12|79|35/763
| 9|..|
-----------
   379
  (65)
   325
-----------
a) .5400
   (707)
b) 4949
-----------
   .45100
   (7146)
   42876
-----------
c) .222400
   (71523)
   214569
-----------
   ..7831
```

Als wir hier die Wurzel 35 hatten, blieb noch der Rest 54. An diesen hängten wir 2 Nullen und verfuhren dann gerade so, als wenn eine neüe Classe herabgezogen worden wäre. Nur machten wir hinter 35 das Comma, zum Beweise, daß nun die Decimalstellen anfangen. Als wir das Product b von der oben stehenden Zahl a abgezogen hatten, blieb uns abermahls der Rest 451. Hieran hängten wir wieder 2 Nullen, und verfuhren abermahls so, als wenn eine neue Classe herabgerückt worden wäre. Nach vollendeter Operation erhielten wir den Rest c, an den abermahls 2 Nullen gehängt wurden, und wir verfuhren dann wieder so, als wären dieß die Ziffern einer neuen Classe gewesen.

Auf diese Weise könnten wir nun ins Unendliche fortfahren, denn der hier zu suchende Bruch ist ein unendlicher Decimalbruch. Wir begnügten uns hier mit Tausendteln. Wir hätten auch noch Zehntausendtel und Hunderttausendtel suchen können; aber je länger man die Operation fortsetzt, desto beschwerlicher wird sie. Warum übrigens immer 2 Nullen angehängt werden, wird weiter unten gezeigt werden.

Welches ist die Quadratwurzel von 2?

Rechnung.

```
|2|1,4142
|1|
-----
 100
 (24)
 96
---------
 ,400
  (281)
  281
----------
  11900
  (2824)
  11296
----------
 ,,60400
  (28282)
   56564
-----------
  ,3836
  u. s. w.
```

Wir lassen es hier bey Zehntausendteln bewenden und machen nun die Probe.

```
                    1,4142
                    1,4142
                  --------
                     28284
                  56568
                 14142
               56568
              14142
           ------------
              199996164
Hierzu der Rest    3836
           ------------
           2,00000000 = 2
```

Die Quadratwurzeln von 3 soll gesucht werden.

Rechnung.

```
|3|1,732
|1|
 200
 (27)
 189
 ‧1100
  (343)
  1029
  ‧‧7100
   (3462)
   6924
   ‧176
   u. s. w.
```

§. 17.

Wir haben oben gesehen, daß, wenn ein Bruch aufs Quadrat erhoben wird, man sowohl seinen Zähler als seinen Nenner quadrire. Wenn folglich die Quadratwurzel aus einem Bruche soll gesucht werden, so muß man sowohl aus seinem Zähler, als aus seinem Nenner die Wurzel ziehen. Da aber diese Verfahrungsart in den meisten Fällen sehr beschwerlich ist, so verwandelt man den gegebenen (gemeinen) Bruch in einen Decimalbruch, aus welchem man denn, wie aus einer ganzen Zahl, die Wurzel zieht. Nur sind dabey noch folgende Regeln zu beobachten:

1) Wenn der gegebene Bruch eine gerade Anzahl von Decimalstellen hat, so ziehe man aus ihm die Quadratwurzel, wie aus einer ganzen Zahl, schneide aber dann in der gefundenen Wurzel so

viel Decimalstellen ab, als die Hälfte der Decimalstellen im gegebenen Bruche beträgt.

Nach dieser Regel wollen wir die Quadratwurzel aus 0,2809 ziehen.

```
0,|28|09|0,53
  |25|..|
  -------
   309
  (103)
   309
  -------
   000
```

Probe.

```
  0,53
  0,53
 ------
   159
  265
 ------
 0,2809
```

Warum aber in der Wurzel nur halb so viel Decimalstellen seyn dürfen, als in der Quadratzahl, wird einleuchten, wenn wir folgende Betrachtung anstellen:

0,2809 ist so viel als $\frac{2809}{10000}$. Man hat also die Quadratwurzel sowohl aus dem Zähler 2809 als auch aus dem Nenner 10,000 zu ziehen. Aus dem Zähler beträgt sie 53, aus dem Nenner aber 100 oder die 1 mit halb so viel Nullen, als deren die Quadratzahl hat. Denn überhaupt, wenn eine Quadratzahl mit einer 1 und einer geraden Anzahl Nullen vorhanden ist, so ist die Wurzel davon 1 mit halb so viel Nullen, wie oben aus S. erhellet. Demnach wäre die Wurzel aus $\frac{2809}{10000} = \frac{53}{100}$.

Dieser Bruch wird aber als Decimalbruch also geschrieben: 0,53, und er hat gerade halb so viel Decimalstellen, als deren seine Quadratzahl hat, oder die Decimalstellen in der Wurzel 53 werden hier bestimmt, wenn man von der Rechten gegen die Linke halb so viel Stellen abschneidet, als die Wurzel Decimalstellen hat.

2) Wenn aber der gegebene Decimalbruch eine ungerade Anzahl von Decimalstellen hat, so mache man sie, indem man noch eine Null zur Rechten anhängt, gerade, und verfahre dann nach der vorhergehenden Regel Nro. 1. Durch das Hinzusetzen einer Null wird aber im Werthe des Bruches keine Veränderung bewirkt, sondern nur der Ausdrukk des Bruches zum Ausziehen der Wurzel bequemer eingerichtet. Denn 0,54 z. B. ist nicht weniger als 0,540, welches man schon daraus siehet, wenn man schreibt $\frac{540}{1000}$ und dann diesen Bruch mit 10 aufhebt, indem man im Zähler und Nenner eine Null streicht, wodurch man $\frac{54}{100}$ bekommt, so viel als 0,54.

Nach der gegebenen Regel wollen wir nun aus 15,34783 die Quadratwurzel ziehen.

Da dieser Decimalbruch eine ungerade Anzahl von Decimalstellen hat, nämlich fünf; so setzen wir noch eine Null daran und rechnen also, indem wir die 15 Ganzen nebst dem angehängten Bruche als lauter Ganze behandeln,

oder sie rechnen, als wenn wir die Zahl 15347830 vor uns hätten.

Rechnung.

```
|15|34|78|30|3,917
| 9|..|..|..|
 634 .. ..
 (69).. ..
 621 .. ..
 ·1378 ..
  (781)..
   781 ..
   59730
  (7827)
   54789
   ·4941
```

Wenn bis hieher gerechnet, die letzte Classe also herunter gesetzt und gehörig behandelt worden ist, so werden die Decimalstellen in der Wurzel (hier ihrer 3) abgeschnitten. Wollte man aber nun noch eine Decimalstelle haben, so würden, wie oben, bey den ganzen Zahlen, 2 Nullen an den Rest 4941 gehängt und verfahren werden müssen, als wenn eine neue Classe herunter gerükkt worden wäre. Und so müßte man verfahren, so oft noch eine Decimalstelle gesucht werden sollte. Denn im Grunde wäre es einerley, ob man oben gleich mehrere Paare von Nullen an den Bruch hinge, oder ob man sie an die Reste hängt, und es gäbe in der Wurzel eben so viel einzelne Decimalstellen, als die Quadratzahl deren Paare hätte.

Und nun kann deutlich gemacht werden, warum oben beym Ausziehen der Wurzeln aus ganzen Zahlen an die Reste immer 2 Nullen gehängt wurden, so oft noch eine Decimalstelle sollte gesucht werden. In folgendem Beyspiele, wo die Wurzel aus 5 soll gezogen werden

```
   |5|2,234
   |4|
   ------
a) 100
   (42)
    84
   ---------
b) 1600
   (443)
   1329
   ---------
c) 27100
   (4464)
   17856
   ---------
    9244
```

blieb nach der ersten Subtraction bey a der Rest 1. Diese zeigte eine ganze Einheit an. Durch Anhängung der 2 Nullen wurde aber 1 mit 100 multiplicirt, die Einheit wurde also in Hunderttel verwandelt. Hunderttel in der Quadratzahl geben aber, wie wir vorhin gesehen haben, Zehntel in der Wurzel. Diese Zehntel, deren wir hier in der Wurzel 2 bekommen haben, wurden bestimmt durch das Comma, welches wir hinter die Ganzen setzten, als wir anfingen, das erste Paar von Nullen anzuhängen. Wir hätten daher auch gleich also schreiben können: 5,00. Denn 5 Ganze, keine Zehntel, keine

Hunderttel oder 500 Hunderttel ($\frac{500}{100}$) ist einerley. Als wir die Wurzel aus dem Reste mit den angehängten Nullen (nämlich aus 100) gefunden hatten, blieb abermahls bey b der Rest 16. Dieses waren 16 Hunderttel. Daran wurden wieder 2 Nullen gehängt, wodurch aus den Hunderteln Zehntausendtel wurden, denn 100 $\times$ 100 = 10000. Die Quadratzahl 10000 gibt in der Wurzel 100. Die Zehntausendmal müssen demnach in der Wurzel Hunderttel geben. Wir bekamen hier deren 3, denn durch die Stelle, wohin die 3 zu stehen kam, werden die Hunderttel bestimmt. In dem Reste 271 bey c blieben uns Zehntausendtel übrig. Durch Anhängung zweyer Nullen wurden sie zu Millionteln. Denn 10000 $\times$ 100 = 1000000. Milliontel in der Quadratzahl geben aber in der Wurzel Tausendtel, denn die Wurzel von 1000000 ist 1000, da 1000 $\times$ 1000 = 1000000 ist. Durch das gehörige Behandeln des Restes c erhielten wir in der Wurzel 4, welches 4 Tausendtel sind. Hier brachen wir ab, indem wir die Quadratwurzel aus 5 = 2, 234... gefunden hatten. Man sieht leicht ein, daß, wenn man die angefangene Operation auf die gehörige Weise fortsetzt, man immer mehr Decimalstellen finden, sich also dem wahren Werthe der übrigens irrationalen Wurzel immer mehr nähern könne.

§. 18.

Da nun unsere Leser die Quadratwurzel aus einem Decimalbruche ziehen können, so können sie dieselbe auch aus jedem gemeinen Bruche ziehen, denn sie dürfen diesen nur in einen Decimalbruch verwandeln.

Sollte z. B. die Wurzel aus $\frac{7}{16}$ gezogen werden, so wäre das Verfahren also: Man sucht den Decimalbruch, der $\frac{7}{16}$ am Werthe gleich kommt, oder: man verwandelt $\frac{7}{16}$ in einen Decimalbruch, wodurch man bekommt 0,4375 und zieht daraus die Wurzel, wie folget.

```
0,|43|75|0,66
  |36|..|
  ------
   ·775
   (126)
    756
  ------
    ·19
```

Wollte man noch eine Decimalstelle haben, so müßte man an den Rest 19 zwey Nullen hängen und dann verfahren, als wenn eine neue Classe heruntergesetzt worden wäre.

Auf eine ähnliche Weise verfahren wir, wenn z. B. aus $\frac{104}{117}$ die Quadratwurzel zu ziehen wäre. Dieser Bruch, als Decimalbruch ausgedrückt, gibt 0,88888888...

Hievon kann man nun 6 oder 8 Ziffern nehmen und also rechnen:

0,|88|88|88|0,942
|81 . . | . . |
•788 . .
(188) . .
736 . .
•5288
(1882)
3764
1524

Probe.

0,942
0,942
1884
3768
8478
887364
Hierzu der Rest 1524
0,888888

§. 19.

Es kann auch der Fall vorkommen, daß aus einer gemischten Zahl soll die Quadratwurzel gezogen werden: wie ist hier zu verfahren?

Man verwandelt den der ganzen Zahl angehängten Bruch in einen Decimalbruch von einer geraden Anzahl Decimalstellen und verfährt, wie wir oben schon S. 53. gezeigt haben. Z. B. aus $1332\frac{1}{4}$ soll die Wurzel gezogen werden. Wir verwandeln also $\frac{1}{4}$ in 0,25 und setzen an und rechnen:

```
|13|32,|25|36,5
|9 ..|..|
 432 ..
 (66) ..
 396 ..
 .3625
  (725)
  3625
  0000
```

Wir haben hier die Zahl 1332,25 als eine ganze Zahl betrachtet und auf die angezeigte Weise die Wurzel daraus gezogen, in dieser aber nach vollendeter Operation halb so viel Decimalstellen abgeschnitten, als deren die Quadratzahl hatte. Diese hatte ihrer aber nur 2, also wurde in der Wurzel nur eine abgeschnitten und wir wissen nun, daß die Quadratwurzel aus 1332¼ ist = 36,5 oder 36½.

Es soll die Quadratwurzel aus 162 $\frac{9}{16}$ gezogen werden. Wir verwandeln den Bruch $\frac{9}{16}$ in den Decimalbruch 0,5625, verbinden ihn mit 162 und setzen an und rechnen, wie folget:

```
|1|62,|56|25|12,75
|1|..|..|..|
 062 .. ..
 (62) .. ..
  24 .. ..
  1856 ..
  (247) ..
  1729 ..
  .12725
   (2545)
   12725
   .....
```

Demnach ist die Wurzel aus $162\frac{9}{16} = 12{,}75 = 12\frac{3}{4}$. Wenn wir $13\frac{3}{4}$ in den unächten Bruch $\frac{51}{4}$ verwandeln und ihn aufs Quadrat erheben, so erhalten wir $\frac{2601}{16} = 162\frac{9}{16} = 162{,}5625$, welches zeigt, daß 162,5625 wirklich die Quadratzahl von $12\frac{3}{4}$ ist, oder daß $12{,}75 = 12\frac{3}{4}$ wirklich die Wurzel von 162,5625 ist.

Es gibt Anfänger, welche also schließen: Die Quadratzahl von 12 ist 144, das Quadrat von $\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$, folglich die Quadratzahl von $12\frac{3}{4} = 144\frac{9}{16}$. Allein diesem Schlusse liegt ein großer Irrthum zum Grunde.

Wenn wir $12\frac{3}{4}$ mit $12\frac{3}{4}$ multipliciren sollen, so müssen wir nehmen:

a) 12 Mahl $12 = 144$
b) 12 Mahl $\frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$
c) $\frac{3}{4}$ Mahl $12 = 9$
d) $\frac{3}{4}$ Mahl $\frac{3}{4}$ oder 162
3 Mahl der 4te Theil
von $\frac{3}{4}$ — $\frac{9}{16}$.

Also das Quadrat von $12\frac{3}{4} = 162\frac{9}{16}$.

§. 20.

Einige Fälle, wo die Geschiklichkeit, die Quadratwurzel auszuziehen, in Anwendung gebracht werden kann.

1) Es soll eine Ausguß-Oeffnung von 2 Quadratfuß gemacht werden; und zwar im Qua-

drate: wie groß muß jede Seite (Kante) der Oeffnung seyn?

Hier muß aus 2 die Quadratwurzel gezogen werden: wir haben sie oben Seite 50. gefunden = 1,4142... Jede Seite der Oeffnung muß also 1,4142... Schuh betragen. Diese Länge ist schon ziemlich genau, denn es fehlt zu ihrer ganzen Länge kein Zehntausendtel des Schuhes mehr.

2) soll eine viereckige hölzerne Saule, deren Grundflächen Quadrate seyn sollen und wovon jede 3 Quadratschuh haben soll, zugehauen werden: wie lang muß die Seite der Grundfläche einer solchen Saule seyn?

Hier muß die Quadratwurzel von 3 gesucht werden. Sie ist = 1,732... und so lang muß die Seite der gedachten Grundflächen werden.

3) Eine metallene Platte von 20 Quadratzoll soll zu einem Behufe verfertigt werden, dabey aber ein Quadrat darstellen: wie lang muß eine Seite dieser Platte seyn?

Antw. 4,472... Zoll; denn dieß ist die (irrationale) Wurzel aus 20.

4) Ein Lager soll im Viereck (Quadrat) abgesteckt werden, worin 66 Bataillons und 40 Eskadrons Platz haben sollen. Ein Bataillon braucht 3350 Quadratruthen, eine Es-

kadron aber braucht 1490 Quadratruthen, Wie lang muß die Fronte des Lagers seyn?

Die zur Beantwortung dieser Frage nöthige Rechnung wollen wir hier anstellen.

```
  3350
    66
 ------
 20100
20100
 ------
221100 Anzahl der Quadratruthen für
       66 Bataillon.

 1490
   40
 ------
59600 Anzahl der Quadratruthen für
      40 Eskadron.

221100
 59600
 ------
280700 Anzahl der Quadratruthen, die
       das Lager halten soll. Um
       nun die Fronte des Lagers
       zu finden, wird aus dieser
       Zahl die Quadratwurzel ge-
       zogen.

|28|07|00|529
|25|..|..|
 -------
 307..
(102)..
 204 ..
 -------
 10300
 (1049)
  9441
 -------
  859
```

Die Fronte des Lagers muß demnach zwischen 529 und 530 Ruthen lang seyn. Hielte sie 530 Ruthen, so hielte das ganze Lager

```
   530
   530
  ─────
  15900
  2650
  ─────
  280900 Quadratruthen,
```

also 200 Quadratruthen mehr als nöthig wären. Wollte man indessen nicht so viel überflüssigen Raum haben, so könnte man die Fronte = 529,9 Ruthen machen, wo dann nur noch 94,01 Quadratruthen zu viel seyn würden. Wollte man aber die Fronte nur 529,8 Ruthen lang machen, so würden 12 Ruthen fehlen.

5) Ein Gutsbesitzer will jedem seiner Unterthanen 1 Morgen Landes = 180 Quadratruthen zu einem Garten schenken. Die Unterthanen wollen ihre Gärten vierektig (als Quadrate) anlegen: wie lang muß die Seite eines solchen Quadrats seyn?

```
|1|80|13,41...
|1|..|
 ─────
 .80
 (23)
 69
 ─────
 1100
 (264)
 1056
 ─────
 ..4400
  (2681)
  2681
 ─────
  1719
```

Ließe man es bey Hundertteln bewenden und machte die Seite des Gartens = 13,41 Ruthen, so betrüge der ganze Flächeninhalt 179,8281 Quadratschuh. Es fehlten also nicht einmahl $\frac{2}{10}$ einer Quadratruthe.

Wollte man aber die Seite = 13,42 Ruthen machen, so würde der Gutsherr 0,0964 Quadratruthen mehr als 180 geben müssen. Denn die Quadratzahl von 13,42 beträgt, wie folgende Rechnung lehrt:

$$\begin{array}{r} 13{,}42 \\ 13{,}42 \\ \hline 2684 \\ 5368 \\ 4026 \\ 1342 \\ \hline 180{,}0964 \end{array}$$

noch 0,0964 Quadratruthen über die 180.

6) Ein Ziegelbrenner soll Bakksteine verfertigen, deren größere Flächen Quadrate sind, indessen sollen diese Bakksteine nicht größer oder kleiner als die gewöhnlichen seyn, die 10 Zoll lang und 6 Zoll breit sind. Die Dikke, die in beyden Fällen gleich bleibt, kommt hier nicht in Betrachtung.

Der Inhalt einer der größern Flächen eines gewöhnlichen Bakk- (Ziegel-) steines ist nach dem angegebenen Maße $6 \times 10 = 60$ Quadratzoll. Es muß nun ein Quadrat gesucht werden, das eben-

ebenfalls 60 Quadratzoll enthält. Um die Seite dieses Quadrates zu finden, muß, wie folget, aus 60 die Quadratwurzel gezogen werden:

|60|7,745
|49|
1100
(147)
1029
7100
(1544)
6176
92400
(15485)
77425
14075

Die gedachten Backsteine müßten 7,745 Zoll lang und breit werden, und dann fehlten noch nicht einmahl zwey ganze Hunderttel eines Quadratzolles von der verlangten Größe. Denn wenn wir die Quadratzahl von 7,745 suchen, so finden wir sie = 59,985025.

7) Man will einen Kasten im Quadrate machen, der einen gegebenen, welcher 5 Schuh lang und $3\frac{1}{2}$ Schuh breit ist, seinem innern Raume nach gleich kommt. Uebrigens soll bey beyden die Höhe gleich seyn.

Wir suchen den innern Flächeninhalt des Bodens, indem wir $5 \times 3\frac{1}{2} = \frac{5}{1} \times \frac{7}{2}$ nehmen, welches zum Producte gibt $\frac{35}{2} = 17\frac{1}{2} = 17{,}5$

Quadratschuh. Aus dieser Zahl wird die Quadratwurzel gezogen.

```
|17,|50*)|4,183
|16 | .. |
 150
 (81)
  81
 6900
 (828)
 6624
 •27600
 (8363)
 25089
 •2511
```

Der Boden des Kastens muß demnach 4,183 Schuh lang und breit seyn, wenn man anders nicht noch eine oder ein paar Decimalstellen suchen will, was aber nichts helfen würde, weil man so kleine Theile eines Schuhes nicht mehr im Maße darstellen könnte.

8) Jemand will einen Garten, der 2 Morgen oder 360 Quadratruthen halten soll, im Quadrate anlegen: wie lang muß die Seite dieses Quadrates seyn?

---

*) Diese Null wurde nach einer oben gegebenen Regel an den Decimalbruch gehängt, um die Zahl seiner Decimalstellen gerade zu machen.

Rechnung.

```
|3|60|18,973
|1|..|
 260
 (28)
 224
 .3600
 (369)
 3321
  .27900
  (3787)
  26509
   .139100
   (37943)
   113829
   .25271
```

Wenn nach dieser Rechnung die Seite des Gartens 18,973 Ruthen lang wäre, so würde wenig (bey weitem kein Zehntel einer Quadratruthe) an den 2 Morgen oder 360 Quadratruthen fehlen, wie man sehen kann, wenn man die Quadratzahl von der gefundenen Längenzahl der Seite des Gartens, wie hier folget, sucht:

```
      18,973
      18,973
      ------
      56919
     132811
    170757
   151784
  18973
  ----------
  359,974729
```

9) Es will Jemand 1000 Baúme auf einen vierekkigen Platz pflanzen und fúr jeden Baum 16 Quadratschuh, in deren Mittelpunkt er stehen soll, bestimmen: wie groß muß die Seite des ganzen Quadrates seyn?

Alle 1000 Baúme erfordern nach der Angabe 16000 Quadratschuh, es muß also die Quadratwurzel aus 16000 gezogen werden.

Rechnung.

```
|1|60|00|126,491
|1|..|..|
 .60 ..
 (22)..
  44 ..
  1600
  (246)
  1476
  .12400
  (2524)
  10096
  .230400
  (25289)
  227601
  ..279900
  (252981)
  252981
  .26919
```

Wenn demnach die Seite des Quadrates 126,491 Schuh lang ist, so wird das Quadrat nur etwas weniger als 16000 Quadratschuh in sich schließen. Es fehlt námlich bey weitem kein $\frac{1}{10}$ eines Quadratfußes, wie folgende Proberechnung lehrt:

126,491
126,491
126491
1138419
505964
758946
252982
126491
15999,973081

Dritter Abschnitt.

Vom Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 21.

Daß man unter einer Cubikzahl eine solche Zahl verstehe, die man erhält, wenn man eine Zahl drey Mahl als Factor nimmt, oder wenn man eine Quadratzahl noch ein Mahl mit ihrer Wurzel multiplicirt, wurde oben bereits gesagt. Wenn wir also z. B. $5 \times 5 \times 5$ nehmen, so bekommen wir das Product 125, welches die Cubikzahl von 5 ist, da hinwiederum 5 in Bezug auf diese Cubikzahl die Cubikwurzel heißt. Cubikzahlen aller

Zahlen von 1 — 10 sind in dem oben gegebenen Cubiktäfelein enthalten, und aus demselben wird man sehen, daß die Cubikzahlen von 1 und 2 einzifferig, die von 3 und 4 zweyzifferig, die übrigen aber von 5 bis 9 dreyzifferig sind. Demnach kann die Cubikzahl einer einzifferigen Wurzel höchstens 3 Ziffern oder 3 Stellen haben, so wie eine zweyzifferige Wurzel eine Cubikzahl von wenigstens 4 Stellen haben kann. So hat z. B. die Cubikzahl von 10 = 1000 vier Stellen oder vier Ziffern.

§. 22.

Wenn man folgende Cubikzahlen

$$1^3 = 1$$
$$10^3 = 1000$$
$$100^3 = 1000000$$
$$1000^3 = 1000000000$$
$$10000^3 = 1000000000000$$

betrachtet und mit ihren Wurzeln vergleicht, so wird man finden, daß, so oft eine Wurzel um eine Ziffer wächst, oder um eine Stelle höher gerückt, also 10 Mahl größer wird, als sie vorher war, ihre Cubikzahl um 3 Ziffern wächst, also 1000 Mahl größer wird, als die Cubikzahl der nächst vorhergehenden, 10 Mahl kleinern, Wurzel.

Dieser Satz bleibt wahr, wenn statt der Nullen auch an sich geltende Ziffern in der

Wurzel stehen. Dieß erhellet aus folgenden Beyspielen, wo statt der 1 und der 0 in den vorhergehenden Exempeln, die höchste Ziffer, die 9, gesetzt ist.

$$9^3 = 729$$
$$99^3 = 970299$$
$$999^3 = 997002999$$
$$9999^3 = 999700029999$$
$$99999^3 = 999970000299999$$

Hieraus erhellet auch der Grund der folgenden Regel:

Willst du wissen, wie viel Ziffern die Wurzel einer gegebenen Cubikzahl habe, so theile diese Cubikzahl von der Rechten zur Linken in Classen und gib jeder Classe 3 Ziffern, doch kann die letzte Classe zur Linken auch nur 2 oder eine Ziffer haben. So viel du nun Classen zählst, so viel Ziffern hat die Wurzel.

Daß die letzte Classe auch nur eine oder 2 Ziffern haben könne, kommt daher, weil es einfache Zahlen gibt, deren Cubikzahl nur mit einer oder mit zwey Ziffern ausgedrükkt wird, wie wir vorhin erst gesehen haben.

Ferner geht aus dem Gesagten hervor, daß, wenn man eine vollkommene Cubikzahl hat, die zur Rechten ihrer an sich geltenden Ziffern noch eine Anzahl von Nullen hat, die durch 3 theilbar ist, man ihre Wurzel finden kann, wenn man die Wurzel aus den an sich geltenden Zif-

fern sucht, und dieser den 3ten Theil der Nullen der Cubikzahl anhängt. Hätten wir z. B. die Cubikzahl 27000, so finden wir ihre Wurzel, wenn wir die Wurzel aus 27 = 3 suchen und dieser 3 den dritten Theil der Nullen von 27000, also eine Null anhängen, wodurch wir 30 bekommen. Sollten wir aus 64000000 die Cubikwurzel geschwind angeben, so suchen wir die Wurzel aus den an sich geltenden Ziffern, nämlich aus 64, und diese ist 4, und setzen den 3ten Theil der Nullen, die in der Cubikzahl enthalten sind, daran, wodurch wir 400 bekommen.

§. 23.

Um den Grund des Verfahrens beym Ausziehen der Cubikwurzel deütlich einzusehen, ist es nöthig, die einzelnen in einer Cubikzahl enthaltenen Producte, und die Art ihrer Entstehung, kennen zu lernen. Wir wollen uns daher bemühen, unsern Lesern diese Producte deütlich vor Augen zu legen und ihre Factoren immer genau anzugeben. Wir wählen dazu die Wurzel 48, und bilden daraus ihre Quadrat- und Cubikzahl, die Producte alle einzeln darstellend und mit Buchstaben bezeichnend.

$$\begin{array}{r} 48 \\ 48 \\ \hline \end{array}$$

a) $64 = 8 \times 8 = 8^2$

b) $320 = 8 \times 40$

c) $320 = 40 \times 8$

d) $1600 = 40 \times 40 = 40^2$

e) $2304 = 48^2$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 18432 \\ 9216 \\ \hline \end{array}$$

f) $110592 = 48^3$

A) $$\begin{array}{r} 64 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$512 = 8^3$

B) $$\begin{array}{r} 320 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$2560 = 8 \times 40 \times 8 = 8 \times 8 \times 40 = 8^2 \times 40 = 40 \times 8^2.$

C) $$\begin{array}{r} 320 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$2560 = 40 \times 8 \times 8 = 40 \times 8^2.$

D) $$\begin{array}{r} 1600 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$12800 = 40 \times 40 \times 8 = 40^2 \times 8.$

E) 64
40

$2560 = 8^2 \times 40.$

F) 320
40

$12800 = 8 \times 40 \times 40 = 8 \times 40^2.$

G) 320
40

$12800 = 8 \times 40 \times 40 = 8 \times 40^2$

H) 1600
40

$64000 = 40 \times 40 \times 40 = 40^3.$

Die einzelnen vorher gefundenen Producte.

512
2560
2560
12800
2560
12800
12800
64000
110592

Die Wurzel 48 theilen wir in zwey Theile, in 40 und in 8 und nennen 40 den ersten Theil

oder den ersten Theil a, und 8 den 2ten Theil oder den Theil b.

Wir haben die Zahl 48 auf das Quadrat erhoben, und da haben wir gesprochen

1) 8 Mahl 8 ist 64 und dieses Product einzeln oben bey a hingesetzt und zugleich seine beyden Factoren beygefügt, indem wir schrieben: $64 = 8 \times 8 = 8^2$.

2) 8 Mahl 4 ist 32. Eigentlich hätten wir sprechen sollen: 8 Mahl 40 ist 320. Darum haben wir auch bey b das Product 320 vollständig geschrieben hingesetzt, und auch seine beyden Factoren beygefügt, indem wir schrieben: $320 = 8 \times 40$. Es thäte nichts zur Sache, wenn wir auch das Null von 320 wegließen, da doch immer die 2 in die Stelle der Zehner, und die 3 in die Stelle der Hunderter zu stehen käme.

3) 4 Mahl 8 ist 32. Wir hätten wieder sprechen sollen: 40 Mahl 8 ist 320. Deßwegen haben wir bey c) geschrieben: $320 = 40 \times 8$.

4) 4 Mahl 4 ist 16, statt zu sagen: 40 Mahl 40 ist 1600. Darum haben wir die Zeile d folgender Maßen geschrieben: $1600 = 40 \times 40 = 40^2$.

Hierauf haben wir diese 4 einzelnen Producte addirt, wodurch wir bey e in der

Zahl 2304 die Quadratzahl von 48 erhalten haben, weßwegen oben steht: $2304 = 48^2$.

Die so gefundene Quadratzahl haben wir abermahls mit 48, und zwar auf die gewöhnliche Weise multiplicirt, wodurch wir in dem Producte 110592 die Cubikzahl von 48 erhalten haben. Deßwegen steht auch oben: $110592 = 48^3$.

In dem wir aber die Quadratzahl 2304 mit 48 multiplicirten, thaten wir nichts anders, als wenn wir die Multiplicationen A, B, C, D, E, F, G, H gemacht, d. h. die einzelnen Producte, welche in der Zahl 2304 enthalten sind, auch einzeln, und zwar zuerst mit 8 und dann mit 40 multiplicirt hätten, weßwegen die Summe der acht einzelnen auf diese Weise gefundenen Producte gerade auch 110592 beträgt, wie aus der vorhergehenden Rechnung erhellt.

Nun wollen wir aber sehen, was und womit wir bey jeder der acht Multiplicationen von A — H multiplicirten.

Bey A multiplicirten wir die Quadratzahl 64 wieder mit der Wurzel 8, wodurch wir die Cubikzahl von 8, nämlich 512, erhielten.

Bey B multiplicirten wir das Product aus 8 in 40, d. h. das Product aus dem 2ten in den 1sten Theil der Wurzel abermahls mit 8, dem 2ten Theile der Wurzel. Das dadurch erhal-

tene Product 2560 haben wir zerlegt in seine einzelnen Factoren: 8 × 40 × 8, und da man die Ordnung der Factoren, dem Producte unbeschadet, verändern kann, so haben wir (oben bey B) dazu geschrieben: 8 × 8 × 40, und das ist wieder so viel als das Quadrat von 8, multiplicirt mit 40, oder: das Quadrat des 2ten Theils der Wurzel, multiplicirt mit dem ersten Theil der Wurzel, oder: der erste Theil der Wurzel, multiplicirt mit dem Quadrate des 2ten Theils der Wurzel.

Bey C fand der nämliche Fall statt, wie der obige bey C enthaltene Ausdruck deutlich zeigt, da 40×8^2 so viel ist als $8^2 \times 40$.

Bey D haben wir das Quadrat des ersten Theiles der Wurzel mit dem 2ten Theile der Wurzel multiplicirt, wie das dort in seine Factoren zerlegte Product 12800 deutlich zeigt.

Bey E wurde das Quadrat des 2ten Theiles der Wurzel mit dem ersten Theile multiplicirt.

Bey F wurde abermahls das Quadrat des 1sten Theiles der Wurzel mit deren 2ten Theile multiplicirt.

Bey G fand der nämliche Fall, wie bey F statt, wie die oben bey G angegebenen einzelnen Factoren zeigen.

Bey H wurde das Quadrat von 40 wiederum mit 40 multiplicirt, wodurch wir die Cubikzahl von 40 bekamen.

Demnach haben wir folgende Producte:

Erstlich 64000 Cubikz. des ersten Theiles der Wurzel.

Zweytens folgende drey gleiche Producte:

$12800 = 40^2 \times 8$ (s. lit. D.)

$12800 = 40^2 \times 8$ (s. lit. F.)

$12800 = 40^2 \times 8$ (s. lit. G.)

38400 dreyfaches Product aus dem Quadrate des ersten Theiles der Wurzel, multiplicirt mit dem 2ten Theile derselben, oder: Product des 3fachen Quadrates des ersten Theiles der Wurzel in den 2ten.

Drittens folgende 3 gleiche Producte:

$2560 = 40 \times 8^2$ (s. lit. B.)

$2560 = 40 \times 8^2$ (s. lit. C.)

$2560 = 40 \times 8^2$ (s. lit. E.)

7680 dreyfaches Product aus dem Quadrate des 2ten Theiles der Wurzel in den ersten, oder: Product des dreyfachen ersten Theiles der Wurzel in das Quadrat des 2ten Theiles derselben.

Viertens 512, Cubikzahl des 2ten Theiles der Wurzel.

Wer sich nun mit den bisher angegebenen Producten und ihren Factoren recht vertraut gemacht hat, dem wird sich folgender Satz lichtvoll darstellen.

Die Cubikzahl einer 2theiligen Wurzel enthält

1) die Cubikzahl mit des ersten Theiles;

2) das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theiles in den andern Theil;

3) das dreyfache Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des andern Theiles, und

4) die Cubikzahl des andern Theiles. Im allgemeinen werden diese Sätze durch folgende Formel, wo a den ersten, und b den 2ten Theil der Wurzel bedeütet, dargestellt:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Wollen unsere Leser in dieser Sache recht hell und deütlich sehen, so werden sie wohlthun, wenn sie von mehreren zweyzifferigen Zahlen die Cubikzahl auf die Art suchen, wie wir es oben gethan. Zum Ueberfluß wollen wir hier selbst noch ein Mahl auf diese Art eine Cubikzahl suchen. Die Wurzel sey 97.

$$97$$
$$97$$
$$49 = 7 \times 7 = 7^2.$$
$$630 = 7 \times 90$$
$$630 = 90 \times 7 \text{ oder } 7 \times 90.$$
$$8100 = 90 \times 90 \times 90^2$$

$$9409$$
$$97$$

$$65863$$
$$84681$$

$$912673 = 97^3.$$

Diese nämliche Cubikzahl finden wir auch, wenn wir, wie folget, die vorhergehenden Partial-Producte alle einzeln zuerst mit 7 und dann mit 90 multipliciren, und die acht gefundenen einzelnen Producte addiren.

A) 49
7

$343 = 7^3$

B) 630
7

$$4410 = 7 \times 90 \times 7 = 7 \times 7 \times 90 = 7^2 \times 90 = 90 \times 7^2$$

C) 630

7

$$4410 = 90 \times 7 \times 7 = 90 \times 7^2$$

D) 8100

7

$$56700 = 90 \times 90 \times 7 = 90^2 \times 7$$

E) 49

90

$$4410 = 7^2 \times 90 = 90 \times 7^2$$

F) 630

90

$$56700 = 7 \times 90 \times 90 = 7 \times 90^2 = 90^2 \times 7$$

G) 630

90

$$56700 = 7 \times 90 \times 90 = 7 \times 90^2 = 90^2 \times 7$$

H) 8100

90

$$729000 = 90 \times 90 \times 90 = 90$$

Diese einzelnen Producte ordnen wir nun wieder wie oben:

$729000 = 90^3$ Cubikzahl des ersten Theiles der Wurzel
$56700 = 90^2 \times 7$
$56700 = 90^2 \times 7$
$56700 = 90^2 \times 7$

170100 Dreyfaches Product aus dem Quadrate des ersten Theiles der Wurzel, multiplicirt mit dem 2ten Theile derselben.

$4410 = 90 \times 7^2$
$4410 = 90 \times 7^2$
$4410 = 90 \times 7^2$

13230 Dreyfaches Product aus dem ersten Theile der Wurzel, multiplicirt mit dem Quadrate des 2ten Theiles derselben.

$343 - 7^3$ Cubikz. des 2ten Theiles der Wurzel und sammeln sie:

$$\begin{array}{r} 729000 \\ 170100 \\ 13230 \\ 343 \\ \hline 912673 \end{array}$$

Anmerkung.

Um sich den Satz: die Cubikzahl einer zweytheiligen Wurzel besteht u. s. w recht zu versinnlichen und sich eine recht deůtliche Vorstellung zu machen, wie eine Cubikzahl wächst, wenn man eine oder mehrere Einheiten zur Wurzel setzt, dient ein von Holz verfertigter zerschnittener Würfel, welcher durch die Verlagshand-

handlung dieses Werkchens zu einem billigen Preise auf besonderes Verlangen zu erhalten ist. Um der dieser Sache ganz Unkundigen willen, wollen wir hier denselben etwas genauer beschreiben. Der ganze Würfel enthält 27 Cubikzoll, seine Seite muß also 3 Zoll betragen. Diese 3 Zoll theilen wir in 2 und 1 und nennen 2 den ersten, 1 den 2ten Theil der Wurzel.

Nro. 1. ist ein Würfel, dessen Seite 2 rheinl. Zoll lang ist. Er ist bezeichnet mit A^3 und stellt den Würfel des ersten Theiles der Wurzel vor. Denn A soll den ersten, B den 2ten Theil der Wurzel hier bedeuten.

Nro. 2. ist ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen Grundfläche das Quadrat des ersten Theiles der Wurzel, und dessen Höhe der 2te Theil dieser Wurzel angibt. Um demnach den Cubik-Inhalt dieses Parallelepipedums zu finden, müssen wir die Quadratzahl des ersten Theiles mit dem 2ten Theile der Wurzel, d. h. hier mit 1, multipliciren*). Wenn wir dieses thun, so finden wir die Zahl 4. Denn $2^2 = 4$ und $4 \times 1 = 4$. Vier Cubikzoll hat also dieser Körper. Er ist bezeichnet mit $A^2 B$.

Nro. 3. und 4 sind die nämlichen Parallelepipeden.

Nro. 5. ist abermahls ein rechtwinkliches Parallelepipedum, das aber zur Grundfläche hat das Quadrat des 2ten Theiles der Wurzel und zur Höhe die Länge, welche der erste Theil der Wurzel ausdrükkt. Seine

*) Es wird hier aus der Geometrie als bekannt vorgesetzt, wie man den Cubik-Inhalt der Parallelepipeden findet.

Grundfläche muß demnach einen Quadratzoll betragen und seine Höhe 2 Zoll ausmachen, folglich der ganze Körper 2 Cubikzoll in sich fassen. Diese Nummer ist bezeichnet mit AB^2.

Nro. 6. und 7. sind eben solche Parallelepipeda.

Nro. 8. ist der Würfel des 2ten Theiles der Wurzel, also gerade 1 Cubikzoll. Dieses Stükk ist bezeichnet mit B^3.

Wenn wir nun Nro. 1. vornehmen, so haben wir einen Würfel, dessen Seite 2 Zoll lang ist, dessen körperlicher Inhalt durch die Cubikzahl von 2, nämlich durch 8, angegeben wird. Acht Cubikzoll faßt demnach dieser Würfel in sich. Wollen wir ihn nun vergrößern, so daß seine Seite 3 Zoll mißt, so müssen wir ihn nach seinen 3 Richtungen (Dimensionen) zu ausdehnen, wir müssen also Nro 2, 3 und 4, und zwar jede Nummer an eine besondere Fläche (oder Seite von Nro. 1.) anlegen. Diese Nummern müssen, weil der Würfel um 1 Zoll in seinen drey Ausdehnungen vergrößert werden soll, 1 Zoll dikk, übrigens aber 2 Zoll lang und 2 Zoll breit seyn, ihre Grundfläche muß demnach 4 Quadratzoll halten. Wenn diese 3 Stükke gehörig angelegt worden sind, so haben wir deßhalb noch keinen Würfel, sondern einen unregelmäßigen Körper, mit verschiedenen einwärts gehenden Winkeln. Diese Winkel oder Ekken müssen auch gar ausgefüllt werden. Wir füllen sie aus mit Nro. 5, 6 und 7, die 1 Zoll dikk und breit und 2 Zoll hoch sind, also 2 Cubikzoll (jede Nummer) betragen. Nun bleibt noch eine Ekke leer und diese wird gar ausgefüllet mit Nro. 8. Jetzt erst haben wir einen Würfel, dessen Seite 3 Zoll beträgt und der nun 27 Cubikzoll in sich faßt. Und wenn

wir uns die Seite 3 in 2 Theile, 2 und 1 zerlegt denken, so bestehet die Zahl, die uns den Inhalt desselben angibt, also die Cubikzahl von 2 + 1, aus folgenden Theilen:

1) Aus der Cubikzahl von 2, des ersten Theiles der Wurzel, folglich aus $2 \times 2 \times 2 = 8$.

2) Aus dem 3fachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theiles der Wurzel in den 2ten; also aus

$$\begin{array}{r} 2^2 \times 1 = 4 \\ 2^2 \times 1 = 4 \\ 2^2 \times 1 = 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

3) Aus dem 3fachen Producte aus dem ersten Theile der Wurzel in das Quadrat des 2ten Theiles; also aus

$$\begin{array}{r} 1^2 \times 2 = 2 \\ 1^2 \times 2 = 2 \\ 1^2 \times 2 = 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

4) Aus der Cubikzahl des 2ten Theiles; also aus $1^3 = 1$.

Nun ist aber $8 + 12 + 6 + 1 = 27$.

Wollte man die Seite des Würfels Nro. 1. nach einem verjüngten Maßstabe = 10 Zoll annehmen, so wäre die Seite des Würfels Nro. 8 = 5, und die Rechnung wäre dann folgende:

Nro. 1. müßte halten $10 \times 10 \times 10 = 1000$ Cubikz.
Nro. 2. müßte halten $10 \times 10 \times 5 = 500$ Cubikz.
Nro. 3. eben so viel.
Nro. 4. eben so viel Alle 3 Nummern (nämlich 2, 3 und 4) also 1500 Cubikz.

Nro. 5. müßte halten $5 \times 5 \times 10 = 250$ Cubikz.
Nro. 6. eben so viel.
Nro. 7. eben so viel.
Nro. 8. müßte halten $5 \times 5 \times 5$ Cubikzoll, also 125.

Nun macht aber $1000 + 1500 + 750 + 125$ gerade 3375, und eben so viel macht die Cubikzahl von von 15, wenn wir sie auf die gewöhnliche Weise suchen, wie folget:

$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \\ 15 \\ \hline 1125 \\ 225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

Suchen wir aber, wie oben, die Producte einzeln und schreiben sie abgesondert, so erhalten wir

$$\begin{array}{l} \quad 15 \\ \quad 15 \\ \hline \text{a)}\ 25 = 5^2 \\ \text{b)}\ 50 = 5 \times 10 \\ \text{c)}\ 50 = 10 \times 5 = 5 \times 10 \\ \text{d)}\ 100 = 10 \\ \hline \end{array}$$

$225 = 15^2$ oder die Quadratzahl von 15.

A) $\begin{array}{r} 25 \\ 5 \\ \hline \end{array}$

$125 = 5^3$ oder die Cubikz. von 5.

B) 50
$\underline{\quad 5}$
$250 = 5 \times 10 \times 5 = 10 \times 5^2.$

C) 50
$\underline{\quad 5}$
$250 = 5 \times 10 \times 5 = 10 \times 5^2.$

D) 100
$\underline{\quad 5}$
$500 = 10 \times 10 \times 5 = 10^2 \times 5.$

E) 25
$\underline{\quad 10}$
$250 = 5^2 \times 10 = 10 \times 5^2.$

F) 50
$\underline{\quad 10}$
$500 = 5 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^2 = 10 \times 5.$

G) 50
$\underline{\quad 10}$
$500 = 5 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^2 = 10^2 \times 5.$

H) 100
$\underline{\quad 10}$
$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3.$

Diese Producte gesammelt und addirt:

125
250
250
250
500
500
500
1000
3375

§. 24.

Aus der genauen Ansicht der bisher mehrmahls dargestellten Partial- und Total-Producte, die beym Aufsuchen einer Cubikzahl sich ergeben, erhellet, daß sich

1) Der Würfel (die Cubikzahl) der Zehner anfängt in den Tausenden und höchstens bis in die Hunderttausende geht;

2) Das dreyfache Product des Quadrats der Zehner in die Einer (des ersten Theiles der Wurzel in den 2ten) anfängt in den Hunderten und sich erstrekket höchstens bis in die Hunderttausende.

3) Das dreyfache Product des Quadrates der Einer in die Zehner in den Zehenden anfängt und höchstens bis in die Zehntausende geht.

4) Der Würfel der Einer in den Einern anfängt und höchstens bis in die Tausende geht.

§. 25.

Nunmehr können wir zur Ausziehung der Cubikwurzel schreiten. Die Regeln, nach welchen diese Operation angestellt wird, sind, wenn die Cubikzahl höchstens 6 Ziffern hat, folgende:

1) Theile die gegebene Cubikzahl von der Rechten zur Linken in Fächer oder Classen, und gib jeder Classe 3 Ziffern; doch kann die äusserste zur Linken deren auch nur eine oder zwey haben.

2) Nun nehme man aus dem Wurzeltäfelein (S. 27.) eine Cubikzahl, die so groß oder zunächst kleiner ist, als die Zahl in der äusserften Classe zur Linken, und setze sie unter diese Classe, wie man Zahlen, die von einander abgezogen werden sollen, unter einander setzt. Hierauf ziehe die unter gesetzte Zahl von der obern ab, die Wurzel aber, die zur untergesetzten Cubikzahl gehört, setze man hinter die gegebene Cubikzahl, z. B.

```
|912|673|9
|729|   |
-----
 183
```

3) Wenn so weit, wie im vorhergehenden Beyspiele, gerechnet ist, so ziehe man die nächstfolgende Classe zu dem erhaltenen Reste (hier 183) herab, nämlich also:

|912|673|9
|729| . . |
183673

4) Nun suche man das Quadrat von dem bereits gefundenen Theile der Wurzel, verdreyfache es und setzte das dadurch erhaltene Product so unter, daß seine niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgerückten Classe zu stehen komme und schließe es in Klammern, nämlich also:

|912|673|9
|729| . . |
183673
(343)

9
9
81
3
243

und dividire damit in die darüber stehende Zahl, und den gefundenen Quotienten setze man neben den zuerst gefundenen Theil der Wurzel.

Demnach muß im vorliegenden Beyspiele mit 243 in 1836 dividirt werden, denn die noch daneben stehende Zahl 73 geht uns bey dieser Division nichts an.

Wir dividiren also, wie folget:

|912|673|97
|729| |
183|683
(24 3)

und setzen den Quotienten 7 neben die 9.

5) Jetzt nehme man a) den zuletzt gefundenen Quotienten (hier 7) und multiplicire damit

den Divisor (hier 243) und setze das dadurch gefundene Product so unter, daß seine niedrigste Ziffer (der Einer) zu stehen komme unter die höchste der herabgerükkten Classe (unter die Hunderter); nämlich also:

```
|912|673|97
|729|...|
---------
 183|673
 (243)
 1701
```

b) das dreyfache Product aus dem Quadrate des zweyten Theiles in den ersten und setze es so unter, daß seine niedrigste Ziffer unter den Zehner der herabgerükkten Classe zu stehen komme; c) den Cubus des 2ten Theiles der Wurzel und setze ihn so unter, daß seine niedrigstr Ziffer auch unter die niedrigste Ziffer der herabgerükkten Classe zu stehen komme. Das Exempel wird nun also aussehen:

```
|912|673|97          7
|729|...|            7
---------          ----
183673              49
(243)                9
                   ----
1701               441
 1323                3
                   ----
   343             1323
---------
                     7
                     7
                   ----
                    49
                     7
                   ----
                   343
```

6) Nun addire man die 3 untergesetzten Producte und ziehe die Summe von der oben (über dem Divisor 243) stehenden Zahl ab.

```
|912|673|97
|729|...|
---------
 183|673
  (243)
  1701
   1323
     343
---------
  183673
---------
  000000
```

Die gegebene Zahl 912673 war demnach eine vollkommene Cubikzahl, (denn wir erhalten beym letzten Abziehen keinen Rest) und ihre Wurzel 97.

Probe.

```
     97
     97
   ----
    679
   873
   ----
   9409
     97
   ----
  65863
 84681
 ------
 912673
```

Der Grund der angegebenen Verfahrungs-

art ist, nach dem, was vorausgeschikkt worden ist, leicht einzusehen. In der ersten Classe linker Hand der gegebenen Cubikzahl muß, nach dem oben Bemerkten, auch die Cubikzahl des ersten Theiles der Wurzel liegen. Dieser erste Theil kann aber keine andere Zahl seyn, als von eine von 1—9. Diejenige von den, in dem Wurzeltäfelein enthaltenen, Cubikzahlen, welche der in der ersten Classe enthaltenen Zahl gleich ist oder ihr am nächsten kommt, muß die Cubikzahl seyn, welche in dieser Classe enthalten ist. Wir sondern sie, wenn sie kleiner ist, davon ab, und setzen ihre Wurzel an den gehörigen Ort. Im vorigen Beyspiele blieb nach dieser Absonderung noch ein Rest (von 183). Woher dieser? Von den übrigen Producten, die noch in der gegebenen Cubikzahl enthalten sind. Nun sind aber diese Producte nicht allein in dem Reste (183), sondern auch noch in der nächstfolgenden Classe mit enthalten. Daher verbinden wie diese Classe mit dem erhaltenen Reste. Dadurch bekommen wir aber die Zahl 183673. In dieser Zahl sind aber noch die übrigen drey Theile, von den vieren (oben angegebenen), woraus eine Cubikzahl besteht, enthalten. Darunter ist das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theiles der Wurzel in den Zweyten. Da wir bereits den ersten Theil der Wurzel haben, so ist uns ja, wie oben bey der Quadratzahl, der eine Factor und das Product gegeben. Wir finden

nun den andern unbekannten Factor, indem wir mit dem bekannten in das Product dividiren. Der bekannte Factor ist aber das dreyfache Quadrat des ersten Theiles der Wurzel $= 9 \times 9 \times 3 = 243$, weßhalb wir oben mit dieser Zahl dividirten. Wir setzten aber diesen Divisor so unter, daß seine niedrigste Ziffer unter die Hunderte zu stehen kam, weil das 3fache Product aus dem Quadrate des 1sten Theiles in den 2ten Theil der Wurzel in den Hunderten anfängt. Nun bekamen wir in 7 den 2ten Theil der Wurzel. Jetzt konnte untersucht werden, ob in der Zahl 183673 wirklich noch folgende 3 Producte enthalten seyn oder nicht. a) Das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theiles der Wurzel in den 2ten; b) das dreyfache Product aus dem Quadrate des 2ten Theiles in den ersten; c) der Cubus des 2ten Theiles der Wurzel. Deßwegen suchten wir erstlich den erst unter a genannten Theil, indem wir den Divisor 243 ($= 9^2 \times 3$) mit 7 multiplicirten; zweytens den unter b, und drittens den unter c genannten Theil und setzen die beyden ersten Theile so unter, als wenn die ihnen fehlenden Nullen dabey gewesen wären, weil der Werth ihrer Ziffern schon durch ihre Stellen bestimmt ist. Wir fanden das unter a genannte Product $= 1701$, es ist aber dieses so viel als 170100; das unter b genannte Product $= 1323$, so viel als 13230; das unter c genannte Product $= 343$.

Als wir diese 3 Producte addirt hatten, fanden wir sie in ihrer Summe wirklich gleich der Zahl 183673.

Nun wollen wir das erst gerechnete Exempel noch ein Mahl übersehen und die nach und nach untergesetzten Producte dabey ins Auge fassen.

```
   |912|673|97
 a)|729|...|
   ---------
    183673
     (243)
 b) 1701
  c) 1323
   d) 343
   -------
    183673
   -------
    000000
```

Die bey a untergesetzte Zahl 729, die eigentlich, weil sie zur Rechten noch 3 Stellen hat, so viel als 729000 ist, ist die Cubikzahl von 90. Die bey b untergesetzte Zahl ist das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theiles der Wurzel in den 2ten. Die bey c untergesetzte Zahl ist das dreyfache Product aus dem Quadrate des 2ten Theiles der Wurzel in den ersten mit hinweggelassener Null. Was die bey d untergesetzte Zahl ist, ist an sich klar. Wir haben also alle Theile, die zu einer Cubikzahl einer zweyzifferigen Wurzel gehören, nach und nach gefunden und sie von der gegebenen Cubikzahl abgezogen, wodurch wir zu Ueberzeugung kamen,

daß die gefundene Wurzel 97 die richtige seyn müsse.

Wir suchen die Cubikwurzel von 110592.

	A	B
|110|592|48	A	B
| 64| |	4	8
a) 46592	4	8
(48)		
384	16	64
768		
512	3	4
e) 46592	48	256
00000		3
		768

Was mußte bey dieser Operation nach und nach geschehen?

1) Mußte die Zahl gehörig in Classen getheilt werden.

2) Mußte im Cubiktäfelein eine Cubikzahl gesucht werden, die der Zahl in der ersten Classe gleich, oder ihr am nächsten (nächst kleiner) war, diese mußte unter die erste Classe gehörig gesetzt und dann die Subtraction vorgenommen, die zu der untergesetzten Cubikzahl gehörige Wurzel aber an ihren Ort gesetzt werden. Dadurch fanden wir den Rest 46 und den ersten Theil der Wurzel, nämlich 4 (eigentlich 40, weil die 4,

wenn

wenn der 2te Theil der Wurzel hinzukommt, in die 2te Stelle zu stehen kommt).

3) Nun mußte die nächst folgende Classe herabgerükkt, die 4 (bey A) aufs Quadrat erhoben, dieses Quadrat 3 Mahl genommen und die dadurch entstandene Zahl 48 so untergesetzt werden, daß ihre niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgerükkten Classe zu stehen kam, und dann mußte man mit dieser Zahl (48) in die darüber stehende Zahl 465 dividiren. Der hier gefundene Quotient gab 8, den 2ten Theil der Wurzel. Mit diesem jetzt gefundenen Theile wurde der Divisor multiplicirt und das Product 384 (eigentlich 38400) so untergesetzt, daß seine niedrigste Ziffer auch unter die niedrigste Ziffer des Divisors zu stehen kam.

4) Jetzt wurde die gefundene 8 (der 2te Theil der Wurzel) (bey B) aufs Quadrat erhoben, dieses Quadrat mit 4, dem ersten Theile der Wurzel, multiplicirt und dieses Product verdreyfacht, und die dadurch erhaltene Ziffernreihe so untergesetzt, daß die niedrigste Ziffer in die Stelle der Zehner zu stehen kam.

5) Nun wurde auch der Cubus von 8 (= 512) gesucht und so untergesetzt, daß seine niedrigste Ziffer die Stelle der Einer einnahm.

6) Die drey auf diese Art erhaltenen Producte, nämlich 384 (eigentlich 38400) 768 (eigentlich 7680 und 512 wurden addirt. Sie gaben die Summe 46592, und diese Zahl wurde von der oben (über den Divisor 48) stehenden Zahl abgezogen.

Anmerkung.

Hätte man oben, als mit 48 in 465 dividirt wurde zum Quotienten etwa 9 genommen, so würde man bey e eine größere Summe als 46592 erhalten haben, und diese hätte man nicht von der Zahl bey a abziehen können, welches, wie beym gewöhnlichen Dividiren, ein Zeichen gewesen wäre, daß der Quotient um 1 hätte vermindert werden müssen. Hätte man aber statt 8 nur 7 Mahl genommen, so würde, wie folgende Rechnung

```
|110|592|47
| 64|...|
-----------
  46592
  (48)
  336
   588
     343
  -------
   39823
  -------
    6769
```

zeigt ein Rest von 6769 geblieben seyn. Nun ist es zwar möglich, daß bey dieser Operation ein Rest bleibe. Um aber zu sehen, ob dieser Rest nicht zu groß sey, und ob die Wurzel nicht

etwa noch um 1 erhöht werden müsse, hat man folgendes Mittel. Man sucht von der gefundenen Wurzel die Quadratzahl, addirt dazu die Wurzel selbst, nimmt diese Summe 3 Mahl und addirt zu dem Producte noch 1. Im vorliegenden Falle demnach also:

$$\begin{array}{r} 47 \\ 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 = 47^2 \\ 47 \text{ dazu addirt} \\ \hline 2256 \\ 3 \\ \hline 6768 = 2256 \times 3 \\ 1 \text{ dazu addirt} \\ \hline 6769 \end{array}$$

Ist nun die auf diese Art zuletzt gefundene Zahl entweder gerade so groß, oder noch größer als der Rest; so ist dieß ein Beweis, daß die die Wurzel (die 2te Ziffer) wenigstens noch um 1 erhöht werden müsse. Ist aber der Rest kleiner, so kann keine Erhöhung der Wurzel mehr Statt finden.

Der Grund hievon liegt darin:

Wenn man zu einer Cubikzahl die dreyfache

Summe ihrer Wurzel und des Quadrates dieser Wurzel und noch Eins addirt, so erhält man die Cubikzahl einer um 1 erhöhten Wurzel. Demnach wachsen die Cubikzahlen der in der natürlichen Ordnung auf einander folgenden Wurzeln immer um die 3fache Summe der Wurzel und ihres Quadrates der nächst vorhergehenden Cubikzahl, wenn zu dieser Summe noch 1 addirt wird. Oder auch: die Cubikzahl einer um 1 erhöheten Wurzel besteht aus der Cubikzahl der nächst vorhergehenden (um 1 kleinern) Wurzel, aus der dreyfachen Summe dieser Wurzel und ihres Quadrates, und aus Eins. Beyspiele werden diese Sache deutlicher machen.

Die Cubikzahl von 1 ist 1. Wir wollen aus 1 die Cubikzahl von 2 machen. Demnach suchen wir das Quadrat von 1: dieses ist 1; dazu addiren wir die Wurzel 1, und wir bekommen also 2; diese Summe nehmen wir 3 Mahl und erhalten 6; zu dieser Zahl addiren wir noch 1, wodurch wir 7 erhalten. Um 7 nun ist die Cubikzahl von 2 größer als die Cubikzahl von 1.

Nun wollen wir aus 8, der Cubikzahl von 2, die Cubikzahl der nächst höhern Wurzel, nämlich von 3, machen. Wir suchen also das Quadrat von 2 = 4, addiren dazu die Wurzel 2, wodurch wir 6 bekommen, nehmen diese Summe 3 Mahl, welches uns 18 gibt, addiren dazu noch 1, und bekommen also 19. Um 19 aber

ist die Cubikzahl von 3 größer, als die Cubikzahl von 2. Denn 8, die Cubikzahl 2, um 19 vermehrt, gibt 27, die Cubikzahl von 3. Um aus der Cubikzahl 27 die Cubikzahl der nächst höhern Wurzel, nämlich von 4, zu bilden, verfahren wir eben so. Wir nehmen das Quadrat von 3, also 9, addiren dazu die Wurzel 3, welches 12 gibt, nehmen nun die Summe dieses Quadrates und seiner Wurzel 3 Mahl, wodurch wir 36 erhalten, und addiren hierzu noch 1, wodurch wir die Zahl 37 bekommen. Um 37 aber ist die Cubikzahl von 4 größer, als die Cubikzahl von 3, denn 27 + 37 = 64, welches die Cubikzahl von 4 ist.

Daß nach dem angegebenen Gesetze die Cubikzahlen wachsen müssen, läßt sich leichter an dem oben erwähnten zerschnittenen Würfel zeigen, als schriftlich darthun.

Die Wurzel soll aus 374600 gezogen werden.

|374|600|72
|343|
= 31600
(147)
294
84
8
30248
= 1352

Hier ist ein Rest geblieben. Um nun zu sehen, ob dieser Rest nicht zu groß, folglich der

2te Theil der Wurzel nicht zu klein angenommen sey, machen wir die Probe nach der vorhin angegebenen Regel.

```
     72
     72
   ────
    144
   504
   ────
   5184 = 72²
     72 dazu addirt
   ────
   5256 diese Summe wird verdreyfacht
      3
   ────
  15768
      1 dazu addirt
   ────
  15769
```

Der obige Rest ist kleiner, als die hier gefundene Zahl 15769, folglich kann die Wurzel nicht mehr erhöht werden. Uebrigens aber ist dieser Rest ein Beweis, daß die Zahl 374600 keine vollkommene Cubikzahl und ihre Wurzel irrational ist. Wie man sich aber dem wahren Werthe der Wurzel immer mehr nähern und ihre Zehntel, Hunderttel ꝛc. noch finden könne, wird weiter unten gezeigt werden.

§ 26.

Es soll die Wurzel aus 12895213625 gezogen werden.

```
|12|895|213|625|2345
| 8|...|...|...|
————
 4895 ... ...
 (12)   ... ...
 36     ... ...
   54   ... ...
    27  ... ...
————
 4167 ... ...
——————
 •728213  ...
 (1587)   ...
  6348    ...
  1104    ...
      64  ...
——————
 645904   ...
——————
 •82309625
 (164268
 821340
   17550
      125
——————
 82309625
——————
 00000000
```

```
   A        B
   23       4
   23       4
  ————    ————
   69       16
  46        23
  ————    ————
  529       48
   3        32
  ————    ————
 1587      368
             3
          ————
          1104

      C
     234
     234
    ——————
     936
    702
   468
    ——————
   54756
       3
    ——————
   164268

      D
      25
     234
    ——————
     100
     75
    50
    ——————
    5850
       3
    ——————
   17550
```

Hier haben wir zuerst gerechnet, als wenn die gegebene Cubikzahl nur 2 Classen (nämlich 12 895) gehabt hätte. Als wir aber die Wurzel von diesen 2 Classen, nämlich 23, hatten, so setzten wir zu dem Reste 728 eine neue Classe herab und nahmen an, als wenn wir in der Zahl 23 den ersten Theil der Wurzel hätten, und nun den 2ten suchen sollten. Deßwegen suchten wir bey A das Quadrat von 23, nehmen dasselbe 3 Mahl, und setzten die dadurch gefundene Zahl als Divisor und zwar so unter, daß die niedrigste Ziffer desselben unter die höchste der herabgerükkten Classe zu stehen kam. Hierauf verfuhren wir, wie bisher, wenn die 2te Classe zu dem Rest, der von der ersten Classe übrig blieb, herabgerükkt war. Wir dividirten nämlich mit 1587 in die darüber stehende Zahl 7282 und fanden den Quotienten 4. Mit diesem multiplicirten wir erst den Divisor und setzten das Product unter, wie das Exempel zeigt. Hierauf suchten wir bey B das Quadrat von 4, dem 2ten Theile der Wurzel, multiplicirten dieses mit 23, dem ersten Theile der Wurzel, und verdreyfachten endlich dieses Product, wodurch wir 1104 bekamen. Diese Zahl setzten wir so unter, daß ihre niedrigste Ziffer unter die mittlere (hier als Zehner betrachtet) der herabgerükkten Classe zu stehen kam. Endlich suchten wir auch noch die Cubikzahl von 4 und setzten sie unter, wie das Exempel zeigt, und wie wir bisher schon öfters

gethan haben. Nun verfuhren wir, wie bisher, wo wir 2zifferige Wurzeln suchten. Nach der Subtraction ergab sich der Rest 82309. Zu diesem setzten wir die noch übrige Classe herab und thaten, als wenn wir in 234 den ersten Theil der Wurzel hätten und nun dazu den 2ten noch suchen sollten. Deßwegen wurde bey C das Quadrat von 234 gesucht, dasselbe dann 3 Mahl genommen und das so erhaltene Product 164268 abermahls als Divisor so untergesetzt, daß seine niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgerückten Classe zu stehen kam. Nun wurde verfahren wie vorher, als die 2te und dritte Classe herabgerückt worden war. Nach vollendeter Operation ergab sich, daß kein Rest blieb, die gegebene Cubikzahl also eine vollkommene sey.

Auf diese Weise werden nun alle Cubikwurzeln gefunden, sie mögen so viel Ziffern (Stellen) haben, als sie nur immerhin wollen. Immer wird der gefundene Theil der Wurzel als der erste und der zunächst zu suchende als der zweyte Theil betrachtet, bis alle Classen herabgerückt sind und aus jeder die Wurzel gefunden ist.

Nach diesen Regeln wollen wir nun die Cubikwurzel aus der folgenden Zahl ziehen.

|41|303|330|162|263|34567
|27|...|...|...|...|
14303 ... ...
a(27) ... ...
108 ... ...
144 ... ...
64 ... ...
12304 ... ...
•1999330 ... ...
b (3468) ... ...
17340 ... ...
2550 ... ...
125 ... ...
1759625 ... ...
•239705162 ...
c)(357075) ...
2142450 ...
37260 ...
216 ...
214617816 ...
•25087346263
d) (35831808)
250822656
508032
343
25087346263
00000000000

C
5
5
25
34
100
75
850
3
2550

D
345
345
1725
1380
1035
119025
3
357075

E
6
6
36
345
180
144
108
12420
3
37260

A
3
3
9
3
27

B
34
34
136
102
1156
3
3468

F	G
3456	7
3456	7
20736	49
17280	3456
13824	294
10368	245
11943936	196
3	147
35831808	169344
	3
	508032

Was die Rechnungen von A bis G bedeuten, fällt leicht in die Augen.

Bey A ist das 3fache Quadrat des ersten Theiles der Wurzel gesucht, um den Divisor bey a zu erhalten.

Bey B ist das dreyfache Quadrat des jetzt angenommenen ersten Theiles der Wurzel gesucht, um den Divisor bey b zu erhalten.

Bey C haben wir das Quadrat des Wurzeltheiles 5 mit dem ersten Theile der Wurzel (= 34) multiplicirt und das Product 3 Mahl genommen.

Bey D haben wir das 3fache Quadrat des

bis jetzt gefundenen ersten Theiles der Wurzel gesucht, um den Divisor bey c zu erhalten.

Bey E haben wir das Quadrat des Wurzeltheiles 6 mit 345, dem ersten Theile der Wurzel multiplicirt und das Product 3 Mahl genommen.

Bey F haben wir das dreyfache Quadrat von dem gefundenen Wurzeltheile 3456 gesucht, um den Divisor bey d zu erhalten.

Bey G wurde das Quadrat des letzten (zweyten) Wurzeltheiles 7 mit dem ersten Theile 3456 multiplicirt, und dieses Product 3 Mahl genommen.

§. 27.

Die Cubikzahl eines Bruches ist ein Bruch, dessen Zähler die Cubikzahl des Wurzelzählers und dessen Nenner die Cubikzahl des Wurzelnenners ist. Demnach entsteht die Cubikzahl des Bruches $\frac{3}{4}$ auf folgende Art: $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$, und der so erhaltene Bruch ist $= \frac{27}{64}$. Wenn folglich aus einem Bruche die Cubikwurzel zu ziehen ist, so muß sie sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner gezogen werden. Um sich dieses Geschäft möglichst zu erleichtern, thut man wohl, wenn man den Bruch, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, in einen Decimalbruch verwan-

delt. Wie man aber aus einem solchem die Cubikwurzel zieht, wollen wir jetzt zeigen.

1) Ist der gegebene Decimalbruch so beschaffen, daß sich die Anzahl seiner Decimalstellen durch 3 (ohne Rest) theilen läßt, d. h. wenn er 3, 6, 9, 12 u. s. w. Decimalstellen hat, so ziehe man aus ihm die Cubikwurzel, wie aus einer ganzen Zahl, schneide aber in der gefundenen Wurzel so viel Decimalstellen ab, als der 3te Theil dieser Stellen in dem gegebenen Bruche beträgt. Denn da die Cubikwurzel von 1000 = 10, von 1000000 = 100, oder überhaupt von einer Zahl, die aus 1 und einer durch 3 theilbaren Anzahl von Nullen besteht, die Cubikwurzel eine 1 mit dem dritten Theile dieser Nullen ist; so werden die Decimalstellen in der Wurzel auf die vorhin angegebene Weise richtig bestimmt. Demnach geben z. B. die Tausendtel in der Cubikzahl Zehntel in der Wurzel, die Milliontel in der Cubikzahl aber Hunderttel in der Wurzel. Wie wir leicht sehen, wenn wir aus folgenden Brüchen die Cubikzahlen machen. $\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{125}{1000}$; $\frac{5}{100} \times \frac{5}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{125}{1000000}$.

2) Wenn aber die Anzahl der Decimalstellen eines gegebenen Decimalbruchs, aus dem die Cubikwurzel gezogen werden soll, nicht mit 3 theilbar ist; so hänge man ihm (dem gegebenen Bruche) zur Rechten so viel Nullen an, daß die Anzahl seiner Decimalstellen durch 3 theilbar

werde, (weil das Anhängen von Nullen den Werth des Bruches nicht verändert) und verfahre dann nach der Regel Nro. 1.

Beyspiele.

1) Es soll die Cubikwurzel aus 0,042875 gezogen werden.

Rechnung.

```
0,|042|875|0,35
  | 27|...|
  ---------
     15875
     (27)
     135
      225
       125
     -----
     15875
     -----
     00000
```

Hier hatte der Decimalbruch 6 Decimalstellen, also so viel solcher Stellen, daß die Anzahl derselben durch 3 theilbar ist. Wir zogen aus diesem Bruche die Wurzel, wie aus einer ganzen Zahl, und schnitten am Ende der Operation in der Wurzel so viel Decimalstellen ab, als der 3te Theil dieser Stellen in dem gegebenen Bruche beträgt, d. h. wir setzen vor die 3 ein Comma, und vor dieses die Null.

2) Aus folgender Zahl soll die Cubikwurzel gezogen werden: 0,4658

Rechnung.

```
0,|465|800|77
  |343| ...|
  ---------
  122800
  (147)
  1029
   1029
     343
  ------
  113533
  ------
  ..9267
```

Probe.

```
     0,77
     0,77
    -----
      539
     539
    -----
   0,5929
     0,77
   ------
    41503
   41503
   ------
 0,456533
     9267 der oben gebliebene Rest.
 --------
 0,465800
```

Hier blieb der Rest 9267. Dieser mußte bey der Probe wieder dazu addirt werden, wenn die gegebene Cubikzahl aus der gefundenen Wurzel = 0,77 wieder herauskommen sollte. In jedem andern Falle, wo die Probe gemacht wird,

man habe es mit ganzen Zahlen, oder mit Decimalbrüchen zu thun, muß der Rest, wenn einer vorhanden ist, am Ende zu dem gefundenen Producte addirt werden.

Uebrigens fällt leicht in die Augen, daß in dem letztbehandelten Beyspiele zwey Nullen rechter Hand angehängt worden sind.

3) Aus 78,4 soll die Cubikwurzel gezogen werden.

Rechnung.

```
|78,|400|4,2
|64 |...|
------------
 14400
  (48)
  96
   48
     8
 -----
 10088
 -----
 •4312
```

Probe.

```
     4,2
     4,2
 -------
     84
   168
 -------
   17,64
     4,2
 -------
   3528
  7056
 -------
  74,088
   4,312
 -------
  78,400
```

§. 28.

Wenn die Cubikwurzel aus einer unvollkommenen Cubikzahl gezogen wird, so bleibt alle Mahl ein Rest, und die Wurzel muß irrational seyn. Um indessen dem wahren Werthe der Wurzel sich immer mehr und mehr zu nähern, so sucht man dieselbe auch noch in Zehntel, Hundertteln, Tausendteln u. s. w. zu erhalten.

Zu diesem Zwecke werden nach und nach an jeden Rest 3 Nullen gehängt, und dann so verfahren, als wenn eine neue Classe von Ziffern herabgerükkt worden wäre.

|790|346|92,45
|729|...|

•61346
(243)
486
108
8

49688

a 11658000
(25392)
101568
4416
64

10201024

b • 1456976000
(2561328)
12806640
69300
125

1281357125

c • 175618875000
(256410075)
1538460450
998460
216

153856029816

•21762845184

Hier blieb der Rest bey a. Die Wurzel 92 ist also zu klein, denn ihr Cubus beträgt nur 778688. Die Wurzel 93 wäre aber zu groß, denn ihr Cubus beträgt 804357. Demnach fällt die Wurzel von der obigen Zahl zwischen 92 und 93. Um uns ihrem Werthe nun noch mehr zu nähern und sie noch genauer zu erhalten, als wir sie in 92 gefunden haben, hingen wir dem Reste bey a 3 Nullen an und rechneten übrigens, als wenn eine neüe Classe herabgerükkt worden wäre. Nur machten wir nach 92 das Comma, zum Zeichen, daß nun die Decimalstellen anfangen. Indem wir aber 3 Nullen zu dem gedachten Reste hinzufügten, bekamen wir Tausendtel. Tausendtel in der Cubikzahl geben aber, wie vorhin schon bemerkt worden, Zehntel in der Wurzel.

Als wir oben die Zehntheile der Wurzel gefunden hatten, blieb uns bey b wieder ein Rest. An diesen hingen wir abermahls 3 Nullen, so daß wir Milliontel erhielten. Wir verfuhren dann wieder, als wenn eine neüe Classe von Ziffern herabgesetzt worden wäre, und erhielten durch diese Operation in der Wurzel Hundertel. Aber auch nachdem diese gefunden waren, blieb uns bey c wieder ein Rest, an welchen abermahls 3 Nullen gehängt wurden, und welchen wir dann, wie gewöhnlich behandelten, um in der Wurzel Tausendtel zu bekommen. Hier

brachen wir die Operation ab, weil sie nun schon sehr beschwerlich wird. Indessen siehet man aus dem bisherigen Gange leicht ein, wie man so viel Decimalstellen suchen könne als man will. Uebrigens bemerken wir hier noch ein Mahl, daß die Decimalstellen in der Wurzel uns bey dieser Operation für Ziffern galten, die Ganze anzeigen, und wir suchten das Quadrat von 92,45 auf keine andere Weise als von 9245.

Zu mehrerer Deutlichkeit wollen wir diese Sache noch aus einem andern Gesichtspuncte darstellen.

Verwandelt man unvollkommene Cubikzahlen in Decimalbrüche, deren Nenner vollkommene Cubikzahlen sind; so läßt sich die Wurzel derselben so weit finden, daß der dabey noch Statt findende Fehler für sehr unerheblich gehalten werden kann. Je größer man aber den Nenner annimmt, desto genauer läßt sich auch die Wurzel bestimmen. Es sey z. B. die Wurzel 18 zu suchen. Weil nun $\frac{18 \times 1000}{1000}$ oder $\frac{18000}{1000}$ so viel ist als 18; so muß $\frac{18000}{1000}$ und 18 einerley Wurzel haben. Die Wurzel aber aus $\frac{18000}{1000}$ würde man erhalten, wenn man sowohl aus dem Zähler 18000, als aus dem Nenner 1000 die Wurzel suchte. Die Wurzel aus dem Nenner ist aber 10; daher hat man weiter nichts zu thun, als die

Wurzel aus 18000 zu suchen, und dieselbe als den Zähler eines Bruches anzusehen, dessen Nenner 10 ist.

```
|18|000|26
| 8|...|
----------
 10000
 (12)
   72
  216
   216
----------
  9576
----------
  424
```

Da nun, wie diese Rechnung zeigt, die Wurzel von 18000 ungefähr 26 ist; so muß sie von $\frac{18000}{1000}$ ungefähr $\frac{26}{10} = 2\frac{6}{10} = 2{,}6$ seyn. Wollte man diese Wurzel aber noch genauer haben, so müßte man die Zahl 18 in einen Decimalbruch mit einem noch größern Nenner, z. B. in 1000000 Theile verwandeln, in welchem Falle in der Wurzel Hunderttel enthalten seyn müßten. Statt 18 nehme man also den gleichgeltenden Bruch $\frac{18000000}{1000000}$ an, und suche aus dem Zähler die Wurzel; denn aus dem Nenner ist sie 100.

18	000	000	262
8	...	...	

10000 ...
(12) ...
72 ...
216 ...
216...
9576...
•424000
(2028)
4056
312
8
408728
•15272

Probe.

262
262
524
1572
524
68644
262
137288
411864
137288
17984728
15272
18000000

Hieraus ist klar, daß die Wurzel aus 18 ungefähr $\frac{262}{100} = 2,62$ betragen muß, also um $\frac{2}{100} = 0,02$ größer ist, als die vorige $= 2,6$. Es geht also auch aus dieser Ansicht hervor, daß man die Irrationalwurzeln desto genauer erhält, je größer man den Nenner des Decimalbruches annimmt, in welchen man die unvollkommene Cubikzahl verwandelt. Daß es aber gleichviel sey, die Nullen gleich oben an die gegebene Zahl, oder nach und nach an die Reste zu hängen, wie wir oben gethan haben, wird jedem von selbst einleuchten.

§. 29.

Es können auch Fälle vorkommen, wo aus einer gemischten Zahl die Cubikwurzel gezogen werden soll. Um hier richtig und bequem zu verfahren, verwandle man den angehängten, gemeinen Bruch in einen Decimalbruch von einer solchen Anzahl Decimalstellen, daß sie durch 3 theilbar sey und verfahre übrigens, wie oben schon gezeigt worden, wo wir aus 78,4 die Wurzel zogen. Soll z. B. aus $12689\frac{3}{4}$ die Wurzel gesucht werden, so wird erst $\frac{3}{4}$ in 0,75 verwandelt diesem Bruch, um eine durch 3 theilbare Anzahl von Decimalstellen zu bekommen, noch eine Null angehängt, und dann also gerechnet:

```
|12|689,|750|23,32
| 8|...  |...|
 4689 ...
(12)   ...
 36    ...
  54   ...
   27  ...
 4167  ...
  522750
  (1587)
  4761
   621
    27
  482337
   40413000
   (162867)
   325734
     2796
        8
   32601368
   7811632
```

Probe.

```
        23,32
        23,32
         4664
        6996
       6996
      4664
      543,8224
         23,32
     10876448
    16314672
   16314672
  10876448
  12681,938368
      7,811632
  12689,750000
```

Wir haben uns hier mit Hundertteln in der Wurzel begnügt. Hätten wir noch Tausendtel haben wollen, so hätten wir noch ein Mahl 3 Nullen an den letzten Rest hängen und die nunmehr schon bekannte Operation wiederhohlen müssen.

§. 30.

Fälle, wo die Geschicklichkeit, die Cubikwurzel auszuziehen, ihre Anwendung findet.

1) Ein Altar, der gerade ein Würfel, und dessen Seite = 1 Ruthe ist, soll doppelt so groß gemacht werden als er ist, aber doch ein Cubus (Würfel) bleiben *).

---

*) Man nenne diese Aufgabe die Delische. Der Grund dieser Benennung liegt in folgender Erzählung: Bey einer Pest, die in Griechenland wüthete, ward das Orakel des Apollo in der Insel Delos um Rath gefragt, wie derselben abzuhelfen wäre. Dieses aber verlangte, man sollte den Altar des Apollo zu Delos verdoppeln. Nun war dieser Altar ein genauer Würfel. Man achtete nicht auf diesen Umstand, sondern glaubte der Absicht des Gottes ein Genüge zu thun, da man ein anderes gleich großes Stück an denselben mauerte. Die Pest dauerte dessen ungeachtet fort, und nun sahe man allererst den Sinn des Orakels ein, daß der Altar doppelt so groß werden, aber

Man sieht bald ein, daß es hier darauf ankommt, eine Zahl zu finden, deren Cubikzahl 2 ist. Diese Zahl kann aber auf keine andere Art gefunden werden als durch Ausziehung der Cubikwurzel aus 2. Daß diese Wurzel irrational seyn müsse, fällt gleich in die Augen, und wir können sie daher nur durch Näherung finden. Um zu unserm Zwekke zu gelangen, verwandeln wir 2 in einen Decimalbruch mit 9 Nullen, weil wir mit Tausendteln in der Wurzel uns begnügen wollen.

---

die Figur eines Würfels behalten sollte. Man bedachte sich aber nicht lange, und ohne Personen von Einsicht um Rath zu fragen, glaubte man, ihn doppelt so groß zu machen, da man ihn doppelt lang, breit und hoch machte. Die Pest dauerte noch fort, und nun ward man endlich genöthigt, sich an Männer zu wenden, welche die Sache verstanden. Plato lösete, wie es heißt, sie am ersten auf.

```
|2|000|000|000|1,259
|1|...|...|...|
 1000 ... ...
  (3)  ... ...
   6   ... ...
  12   ... ...
    8  ... ...
  728  ... ...
   272000  ...
   (432)   ...
   2160    ...
     900   ...
     125   ...
   225125  ...
   =46875000
   (46875)
   421875
     30375
       729
   42491979
   =4383021
```

Nach dieser Rechnung müßte die Seite des Würfels (des Altares) 1 Ruthe, 2 Schuh, 5 Zoll, 9 Linien lang seyn. Es würden aber dann noch 4383021 Cubiklinien = 4 Cubikschuh, 383 Cubikzoll und 21 Cubiklinien fehlen. Wollte man diesen Fehler noch geringer machen, so müßte man noch eine Decimalstelle suchen.

2) Wie groß wäre die Seite des Würfels, der so viel an körperlichem Inhalt hätte als unsere Erde?

Unsere Erde hält 2662550000 Cubikmeilen. Aus dieser Zahl muß demnach die Cubikwurzel gezogen werden, wenn die vorliegende Frage beantwortet werden soll. Wir überlassen dieses Geschäft unsern Lesern.

3) 302 Cubikruthen Steine sollen in 4 cubische Haufen geschlichtet werden: wie lang muß die Seite eines solchen Haufens seyn?

4) 1000 Eimer Soole soll ein cubischer Behälter faessn; 1 Eimer ist 14 Maß, und 35 Maß gehen auf einen Cubikfuß: wie tief muß der Behälter seyn?

5) Eine Kugel, die 12,362 Cubikfuß enthält, soll in einen Würfel verwandelt werden: wie groß muß die Seite dieses Würfels seyn?

6) Wenn 100000 Stück Ducaten in einen Cubus gegossen werden, wie groß wird dessen Seite seyn? Der Cubikfuß gegossenes Ducatengold wiegt 1191,2278 Pfund und 67 Ducaten machen 1 Mark oder 1/2 Pfund.

Fig. 1.

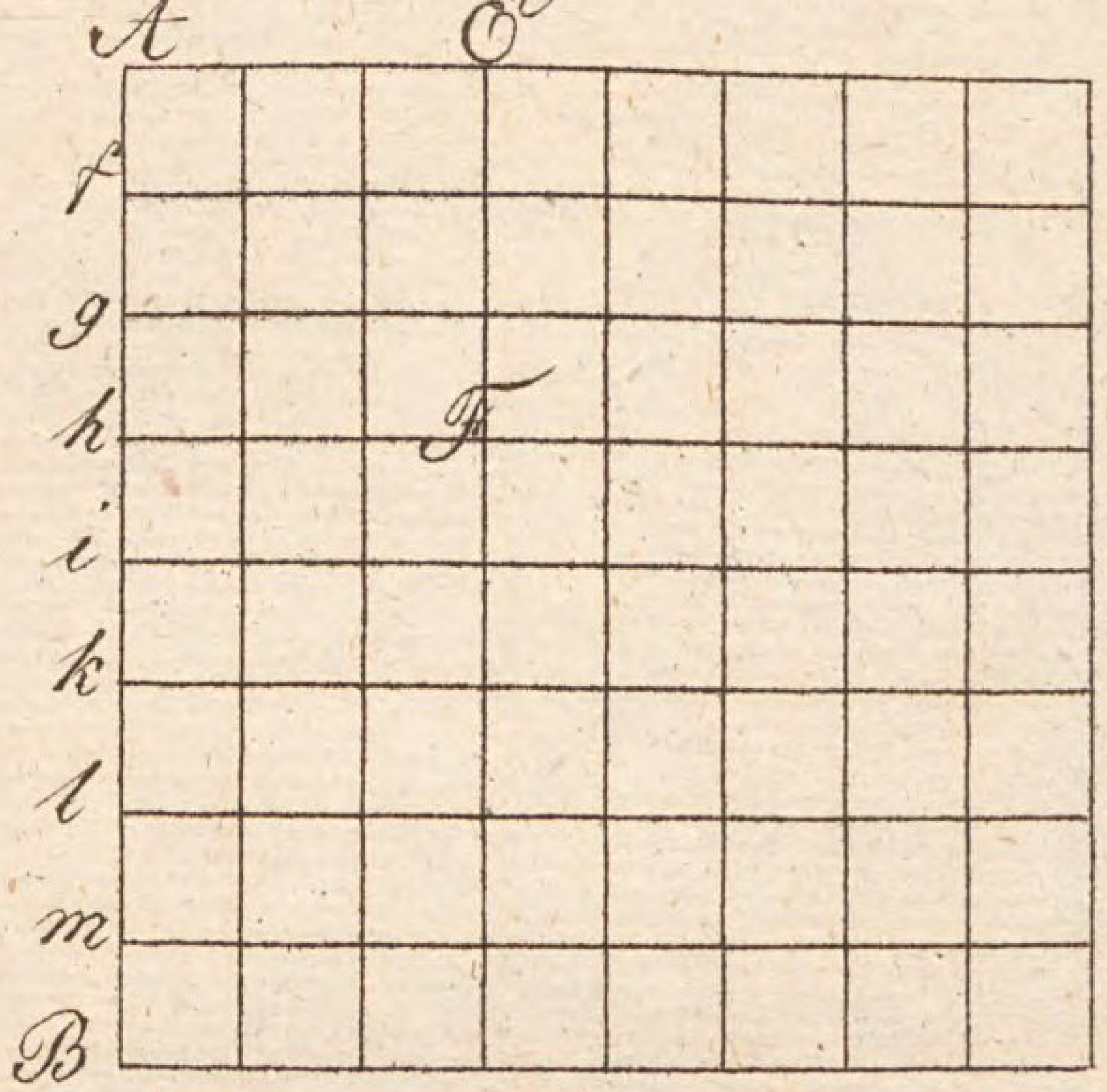


Fig. 2.

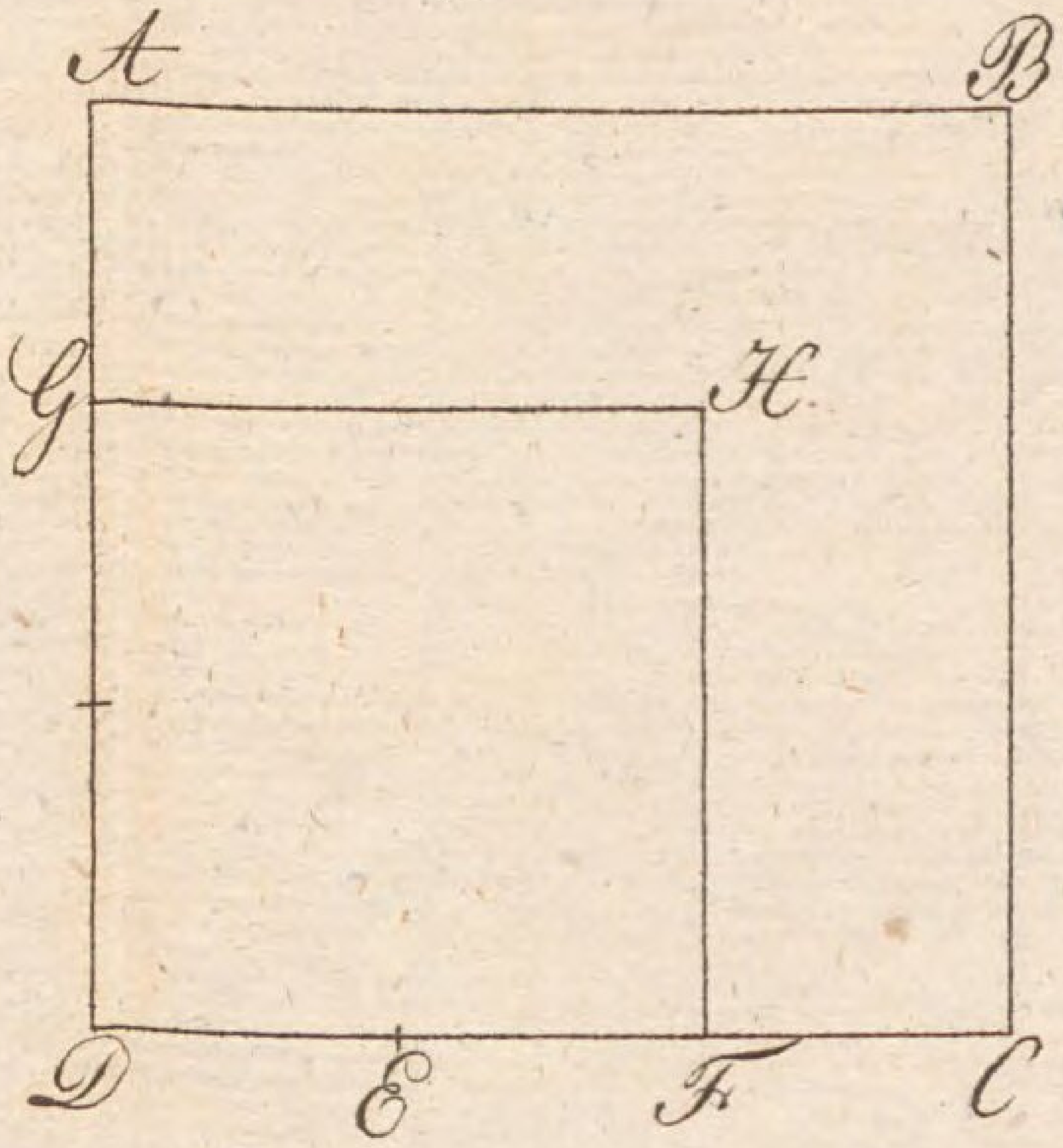


Fig. 3.

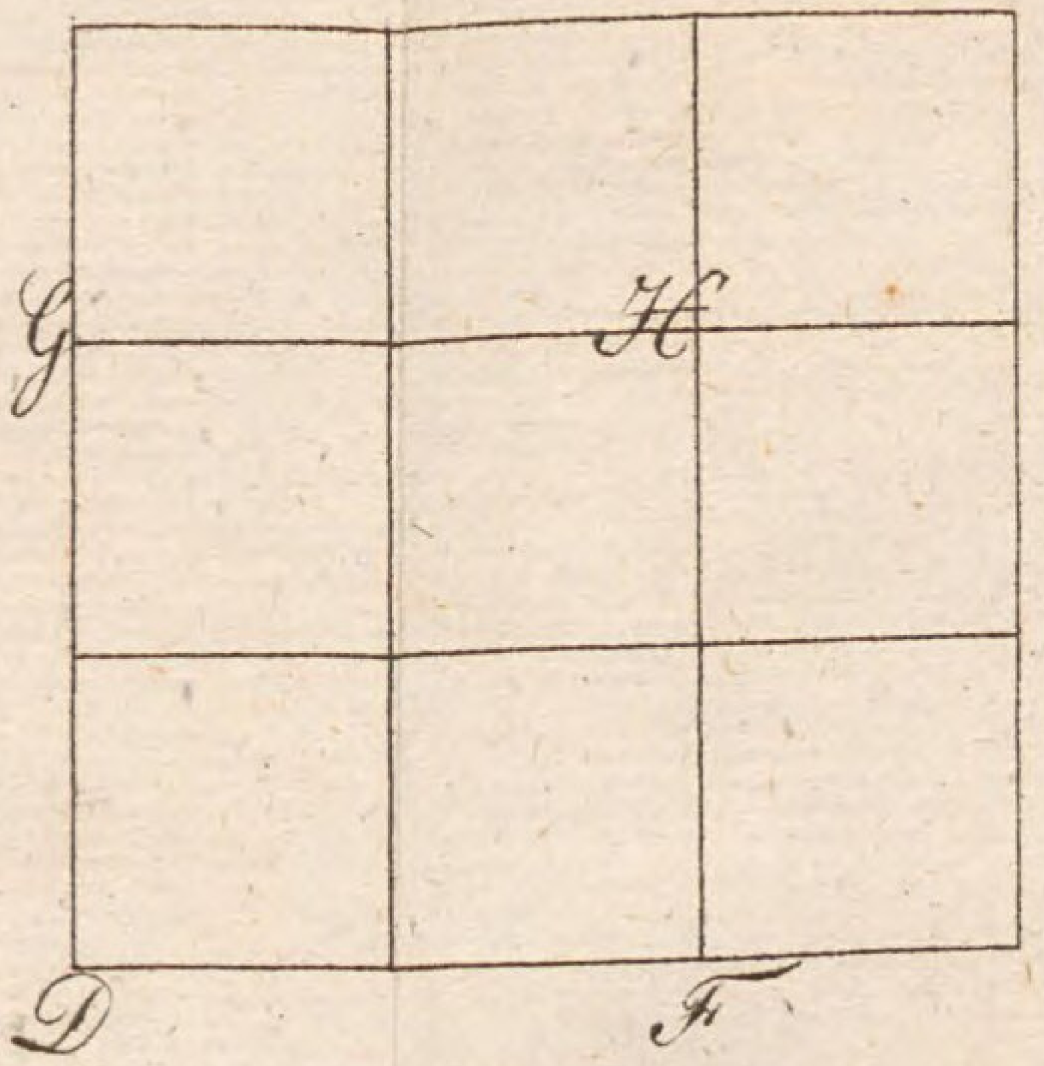


Fig. 4.

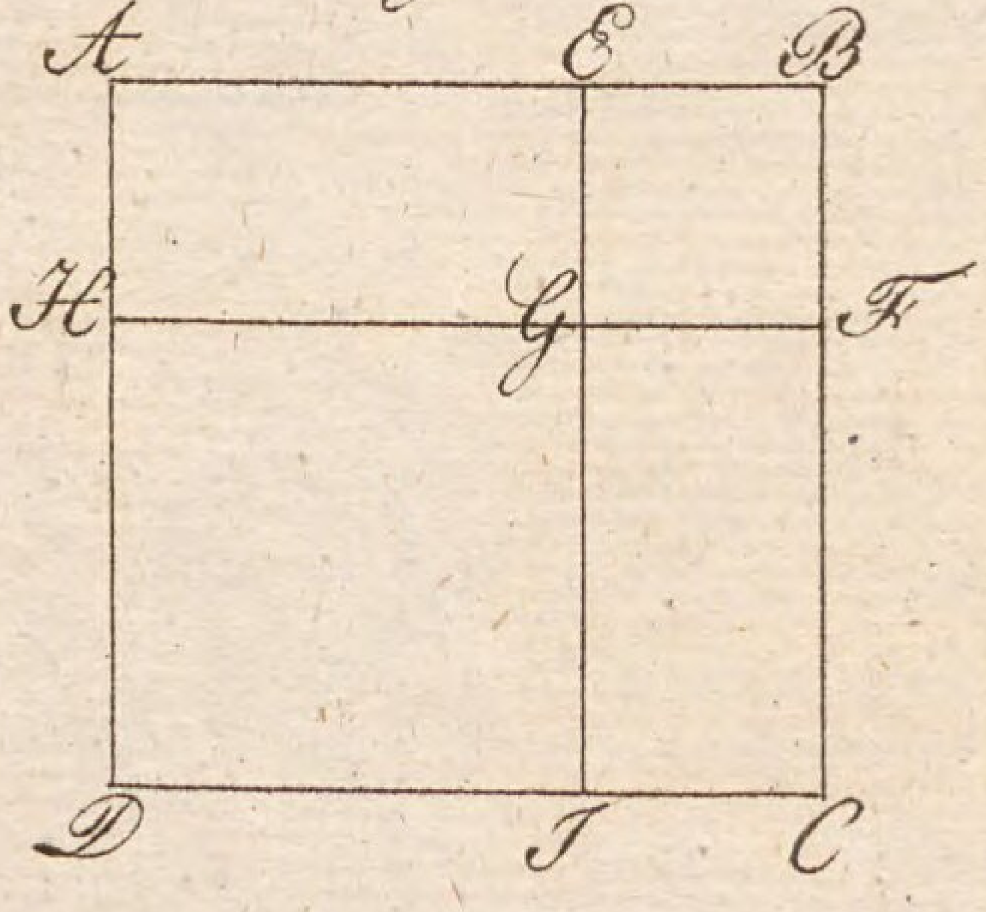


Fig. 5.

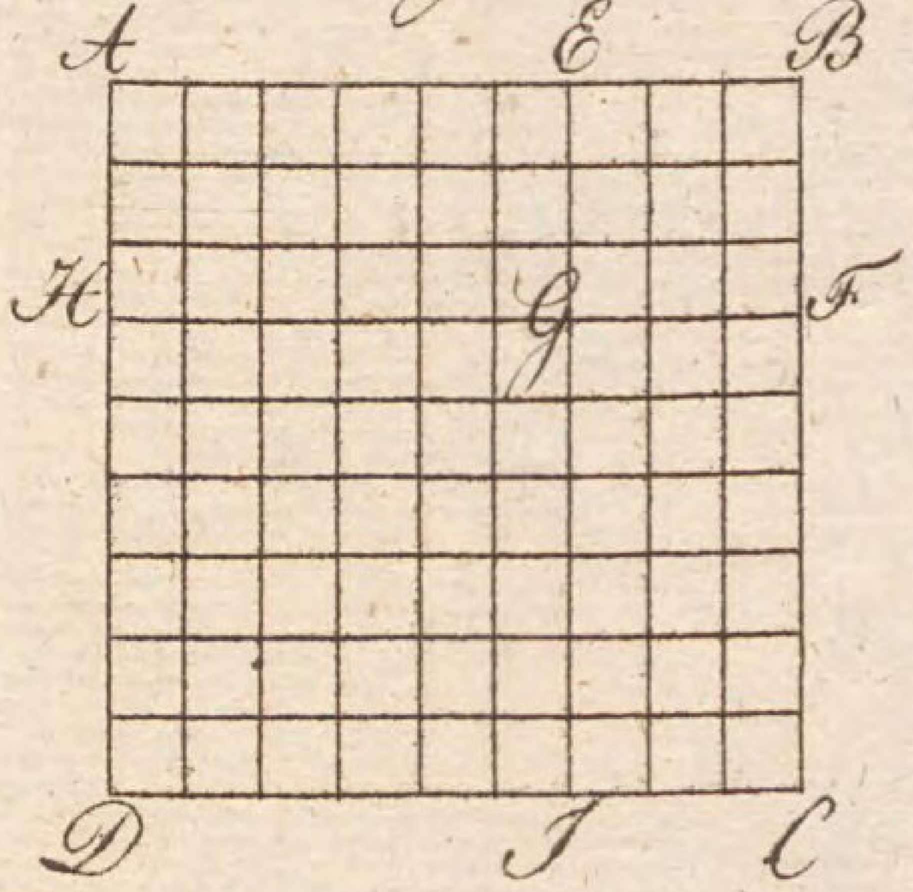
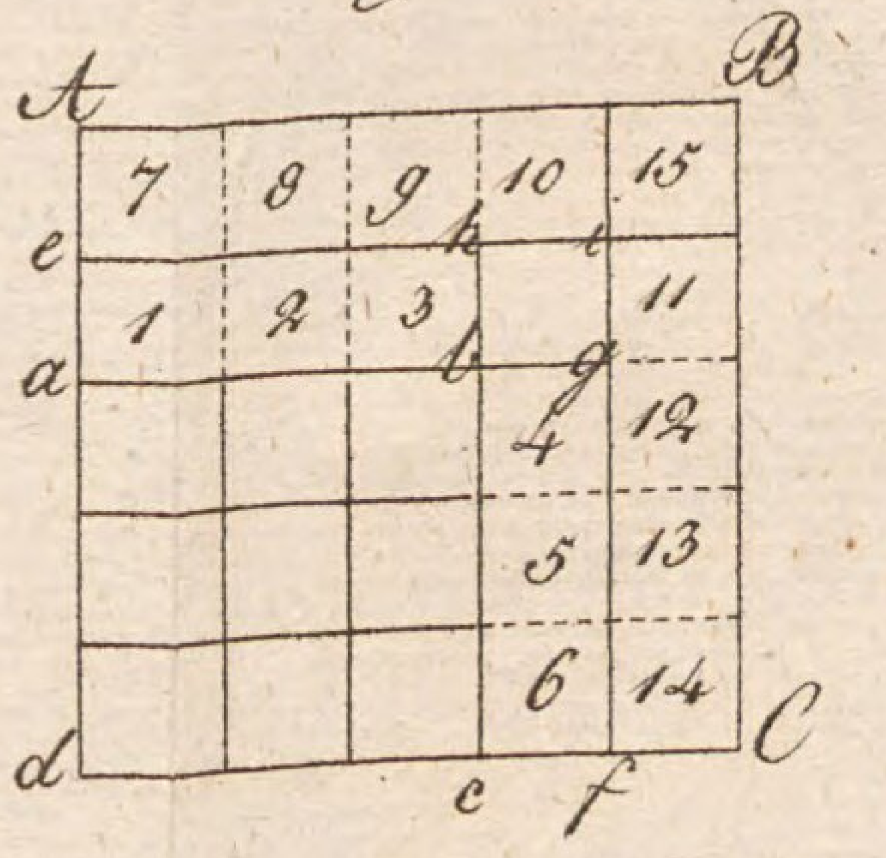


Fig. 6.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Pöhlmann, Johann Paul,

Leichtfaßlicher Unterricht in der Lehre von den Quadrat- und Cubikzahlen

Erlangen 1819

Math.p. 429 c

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082578-3